Liste des projets de M1-ESR

Table des matières

1 Le théorème de Darboux

Le Théorème de Darboux... et plus si affinités

November 20, 2018

Le point de départ de ce mémoire est de se familiariser avec des rudiments de géométrie symplectique pour comprendre l'énoncé et la preuve du Théorème de Darboux. Ce dernier affirme que toute structure symplectique locale est canoniquement isomorphe à celle d'un $\mathbb{R}^{2n}$. On pourra utiliser comme référence le Chapitre 2 du livre de Maciej Zworski *Semiclassical Analysis* (Graduate Text in Mathematics vol. 138 - pages 13 à 23). Les prérequis sont des connaissances de base en calcul différentiel, équations différentielles et, à un niveau plus avancé, un petit peu de formes différentielles.

Selon le temps, on pourra explorer davantage le sujet, notamment les concepts de variété symplectique, sous-variété lagrangienne et fonctions génératrices, étant entendu que l'objectif principal du mémoire est avant tout la rédaction soigneuse du Théorème de Darboux à destination d'un lecteur de niveau M1.

Contact: Jean-Marc Bouclet (bouclet@math.univ-toulouse.fr)

2 Introduction au contrôle optimal des EDO

PROPOSITION DE STAGE - MASTER 1 - 2018/2019
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE, CNRS - UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE 3

Introduction au contrôle optimal des EDO

Encadrant : F. Boyer [1], UPS

Introduction

Le but de ce stage est l'étude de problèmes de contrôle pour des modèles d'équations différentielles. Prenons par exemple un système différentiel linéaire de la forme suivante

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ est le contrôle (à déterminer). Les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ sont fixées. Pour un $t \mapsto u(t)$ donné, on sait qu'il existe une unique solution globale du problème de Cauchy (1), notée $t \mapsto x_u(t)$.

Etant donnée une **cible** $x_T \in \mathbb{R}^n$, le problème de contrôlabilité consiste à savoir s'il existe une fonction $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ telle que la solution de (1) associée vérifie $x_u(T) = x_T$. Si ceci est possible, on s'intéresse en général à trouver, parmi toutes les fonctions u qui réalisent cet objectif celle qui est la plus économique. Mathématiquement, il s'agit de trouver le contrôle u qui minimise une certaine quantité (appelée *le coût*) qui peut être, par exemple, donnée par

$$E(u) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \|x_u(t)\|^2 \, dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt.$$

On peut montrer que ce problème, dit de contrôle optimal, admet une unique solution u^*, que l'on peut complètement caractériser et calculer.

But du stage et prérequis

Le but du stage sera de comprendre l'exemple simple introduit ci-dessus ou quelques unes de ces variantes immédiates puis d'étudier quelques exemples de modèles entrant dans ce cadre [2].

On pourra ensuite éventuellement aller vers des cadres plus généraux, par exemple si le système différentiel considéré n'est plus linéaire mais de la forme générale

$$x'(t) = F(x(t), u(t)),$$

ou bien si on ajoute des contraintes sur les contrôles comme des bornes physiques (par exemple on peut imposer au contrôle de vérifier $\|u(t)\| \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$).

Ce stage sera l'occasion de réviser (ou d'apprendre ?) :

— Du calcul différentiel,
— Les notions de base de la théorie des équations différentielles linéaires (et/ou non-linéaires),
— Les notions de base de l'optimisation.

Il pourra comporter un travail de simulation numérique.

Références

[1] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].

1. e-mail : franck.boyer@math.univ-toulouse.fr
2. La théorie du contrôle intervient de façon cruciale dans beaucoup de domaines applicatifs : mécanique, biologie, santé, etc ...

3 Le théorème de Lax-Milgram : et après ?

PROPOSITION DE STAGE - MASTER 1 - 2018/2019
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE, CNRS - UNIVERSITÉ PAUL SABATIER TOULOUSE 3

Le théorème de Lax-Milgram : et après ?

Encadrant : F. Boyer [1], UPS

Introduction

Vous avez probablement rencontré en cours d'analyse fonctionnelle le théorème de Lax-Milgram qui permet de prouver l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H$ à un **problème variationnel** de la forme

$$a(u, v) = L(v), \;\; \forall v \in H, \tag{1}$$

où H est un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire sur H et L une forme linéaire sur H, vérifiant de bonnes hypothèses.

L'importance de ce théorème provient du fait qu'une large classe d'équations aux dérivées partielles peuvent se mettre sous la forme générale ci-dessus [2]. Ainsi, étudier ces équations revient souvent à trouver le bon espace H et les bonnes formes a et L pour lesquelles le théorème de Lax-Milgram peut s'appliquer.

Problématique

Malgré son caractère très général, on se convainc assez facilement que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram ne sont que des conditions suffisantes de résolubilité de (1) et qu'il existe donc beaucoup de situations où ce théorème ne s'applique pas bien que le problème étudié ait toutes les chances d'être bien posé. Par ailleurs, il existe des équations aux dérivées partielles qui ne peuvent pas se mettre exactement sous la forme (1) et pour lesquelles, là encore, le théorème de Lax-Milgram est inopérant.

Le but de ce stage est donc d'étudier diverses extensions du théorème de Lax-Milgram permettant d'accéder à l'analyse de ces problèmes et à certaines applications. On pourra par exemple s'intéresser aux points suivants :

- Théorème de Stampacchia : conditions de résolubilité d'un problème de type (1) avec contraintes.
- Théorème de Banach-Necas-Babuska et condition Inf-Sup : il s'agit de déterminer des conditions nécessaires **et suffisantes** pour que (1) ait une solution unique.
- Introduction aux méthodes de Galerkin et Petrov-Galerkin : ce sont des méthodes d'approximation des solutions de (1) basées sur l'introduction de bons espaces de dimension finie qui sont supposées approcher l'espace H. L'analyse de ces méthodes repose sur les théorèmes évoqués ci-dessus. La méthode des éléments finis est par exemple basée sur ce principe.

On regardera en détail des exemples concrets illustrant ces différents points.

Références

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*, volume 36 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

1. e-mail : `franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`
2. Ceci sera discuté dans le cours EDO/EDP

4 Paysage de la fonction objectif pour l'optimisation de réseaux de neurones

Encadrant Francois Malgouyres (Francois.Malgouyres@math.univ-toulouse.fr)

Résumé du projet Les réseaux de neurones connaissent un fort succès pratique mais les fondements mathématiques de ce succès restent largement incompris. Par exemple, l'apprentissage d'un réseau repose sur l'optimisation des paramètres de poids définissant l'action du réseau. D'un point de vue mathématiques le problème d'optimisation accumule les mauvaises propriétés. Sa fonction objectif est non-convexe, continue mais différentiable, non-coercive, etc. Malgré cela, des algorithmes d'optimisation relativement simples donnent de très bon résultats. Dans ce projet, les étudiants étudieront les rudiments de l'apprentissage, de l'optimisation et analyseront des articles de recherche décrivant des propriétés des fonctions objectifs expliquant pour l'optimisation est possible.

Des références pour le sujet Baldi, Pierre, and Kurt Hornik. "Neural networks and principal component analysis : Learning from examples without local minima." Neural networks 2.1 (1989) : 53-58. Venturi, Bandeira, Bruna, "Neural Networks with Finite Intrinsic Dimension have no Spurious Valleys", ArXiv, February 2018.

5 Distance de Gromov-Hausdorff et cônes métriques

Encadrant : Eveline Legendre (eveline.legendre@math.univ-toulouse.fr)

Résumé Le but du projet serait de comprendre la définition de distance de Gromov-Hausdorff entre espaces métriques, de convergence Gromov-Hausdorff et de limite pointée (qui produit des cônes tangents) en détaillant plusieurs exemples et en abordant les questions d'unicité et de régularité de la limite. Ceci serait déjà un bon programme pour un projet M1, un étudiant particulièrement motivé pourrait aller jusqu'à qu'au théorème de pré-compacité de Gromov ou montrer que le cône tangent est un cône métrique dans certain cas (voir référence b).

Motivation La convergence Gromov-Hausdorff s'est révélée capitale dans la résolution de conjectures récentes en géométrie complexe et se trouve au centre de la géométrie métrique moderne. C'est une notion riche en subtilité mais abordable avec les connaissances acquises en licence et en M1.

Des références pour le sujet a) Structures métriques pour les variétés riemanniennes, M.Gromov (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu), Paris : CEDIC F. Nathan 1981 (Textes mathématiques, Recherche ; 1)

b) Cheeger, Jeff ; Colding, Tobias H. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. Ann. of Math. (2) 144 (1996), no. 1, 189–237.

6 Variétés symplectiques toriques

Encadrant : Eveline Legendre (eveline.legendre@math.univ-toulouse.fr)

Résumé Thème : géométrie différentielle, symplectique

Delzant a établi une correspondance biunivoque entre polytopes convexes d'un espace affine et variétés symplectiques toriques. Par exemple la sphère correspond à un segment et plus généralement les projectifs complexes aux simplexes. Le but du projet serait de comprendre la correspondance et en particulier la construction de la variété à partir du polytope. Un étudiant particulièrement motivé arrivera à décrire la cohomologie de de Rham de la variété à partir du polytope.

Motivation La géométrie torique fournit une grande classe d'exemples intéressants pour la géométrie symplectique et complexe. Grâce à la correspondance de Delzant il est possible de traduire les problèmes de géométrie sur ces variétés abstraites en des problèmes plus abordables sur des convexes d'un espace affine. Pour l'étudiant ce sera un bon moyen de consolider les connaissances acquises en M1 (variétés différentielles, formes différentielles et cohomologie) en s'exerçant sur des exemples concrets.

Références a) M. Audin, Torus actions on symplectic manifolds, Progress in Math, Birkhäuser, 2004

b) T. Delzant, Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment, Bulletin de la Société Mathématique de France, 116 (3) : 315–339,

7 Théorème de Sard et fonctions de Morse

Sujets de stage de M1
Année 2018-2019

Sujet 1

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Théorème de Sard et fonctions de Morse

Résumé: Ce stage aura pour but de donner à l'étudiant la possibilité de s'initier à la topologie différentielle via l'étude des applications lisses entre deux variétés différentiables.

Après un rappel des notions sans doute connues de l'étudiant d'immersions et submersions et leurs formes locales respectives dans un système de coordonnées adaptées, seront étudiées les notions de "transversalité" (d'une application lisse à une sous-variété de la variété d'arrivée, respectivement de deux sous-variétés), de "stabilité" par *homotopie* (des difféomorphismes locaux, des immersions, des submersions, etc), avant d'étudier une démonstration du *théorème de Sard*.

Ce dernier affirme que le sous-ensemble des *valeurs critiques* d'une application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés différentiables est de mesure de Lebesgue nulle.

Deux applications du théorème de Sard seront ensuite étudiées : une aux *fonctions de Morse* (= les fonctions dont tous les points critiques sont non dégénérés) et une autre à l'étude d'une démonstration du *théorème de plongement de Whitney* affirmant que toute variété de dimension k peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ (et même dans $\mathbb{R}^{2k}$, mais nous nous bornerons aux résultat plus faible.)

Ces choses sont bien expliquées, avec des exemples, au chapitre 1 et à l'appendice 1 de la référence principale [GP] pour ce stage.

Bibliographie.

[GP] Victor GUILLEMIN, Alan POLLACK — *Diffeerntial Topology* — Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey (1974).

[M] John MILNOR — Morse Theory — Princeton, N.J., Princeton University Press, **51** (1963).

1

8 Transversalité et intersection

Sujet 2

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Transversalité et intersection

Résumé: Après l'étude de quelques propriétés de base des variétés à bord, quelques résultats fondamentaux seront étudiés : une variété compacte à bord n'admet pas de rétraction sur son bord; le *théorème de point fixe de Brouwer* affirmant que toute application lisse de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède un point fixe.

Ensuite, nour verrons une démonstration du fait que la transversalité est une propriété *générique* : toute application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés différentiables (quelque soit son comportement par rapport à une sous-variété Z de Y donnée d'avance) peut être déformée arbitrairement peu vers une application *transversale* à Z.

Après une étude de la notion de *voisinage tubulaire* d'une sous-variété, nous étudierons des notions de *théorie de l'intersection modulo* 2 : pour toute application lisse $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés dont X est supposée *compacte* et toute sous-variété fermée lisse Z de Y telle que f est *transversale* à Z et $\dim X + \dim Z = \dim Y$, on définit le *nombre d'intersection modulo* 2 $I_2(f, Z)$ de f avec Z comme étant le nombre modulo 2 de points de $f^{-1}(Z)$. (Puisque $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété fermée de dimension 0 de X, elle n'a qu'un nombre fini de points.) Nous verrons que les applications *homotopes* et transversales à la même sous-variété Z ont mêmes nombres d'intersections modulo 2 avec Z.

On étudiera ensuite les *nombres d'enroulement modulo* 2 et une d'émonstration du *théorème de séparation de Jordan-Brouwer* affirmant que le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ d'une hypersurface compacte connexe X consiste en deux ouverts connexes, l'''intérieur" et l'''extérieur" de X.

Enfin, on étudiera une démonstration du théorème de Borsuk-Ulam : toute application lisse $f : S^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ne passant pas par l'origine et symétrique autour de celle-ci (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^k$) tourne autour de l'origine un *nombre impair de fois* (i.e. son nombre d'enroulement modulo 2 est égal à 1).

Ces choses sont bien expliquées, avec des exemples, au chapitre 2 de la référence principale [GP] pour ce stage.

Bibliographie.

[GP] Victor GUILLEMIN, Alan POLLACK — *Diffeerntial Topology* — Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey (1974).

9 Théorème de l'indice de Poincaré-Hopf

Sujet 3

Encadrant: Dan Popovici (popovici@math.univ-toulouse.fr)
Titre: Théorème de l'indice de Poincaré-Hopf

Résumé: Nous étudierons la notion de champ de vecteurs sur une variété différentielle X dans $\mathbb{R}^n$ et ensuite la notion d'indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé. Plus généralement, nous étudierons les relations entre les champs de vecteurs et la topologie de la variété. Le théorème principal, de Poincaré-Hopf, affirme que si ξ est un champ de vecteurs lisse qui n'a qu'un nombre fini de zéros sur une variété compacte orintée X, alors la somme des indices de ξ est égale à la caractéristique d'Euler de X. D'autres notions fondamentales de géométrie différentielle seront abordées.

Ces notions et résultats sont présentés au chapitre 3, section 5, de la référence principale [GP] suivante :

Bibliographie.

[GP] Victor GUILLEMIN, Alan POLLACK — *Diffeerntial Topology* — Prentice-Hall, Inc., Englewood, New Jersey (1974).

3

10 Métrique de Poincaré et itération : Théorème de Wolff-Denjoy

Encadrant Jasmin Raissy (jasmin.raissy@math.univ-toulouse.fr)

Résumé Un premier but de ce projet sera l'étude de la métrique de Poincaré dans le disque unité, pour arriver au Lemme de Schwarz-Pick qui nous dit que tout endomorphisme holomorphe du disque unité est une contraction pour la métrique de Poincaré. Ensuite on s'intéressera au comportement au bord d'une fonction holomorphe du disque unité dans lui même sans points fixes, pour arriver au Théorème de Wolff-Denjoy dans le disque unité.

Des références pour le sujet M. Abate, Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds [Chapter 1]
Burckel, R. B. (1981), "Iterating analytic self-maps of discs", Amer. Math. Monthly, 88 : 396-407
Carleson, L.; Gamelin, T. D. W. (1993), Complex dynamics, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer-Verlag
Denjoy, A. (1926), "Sur l'itération des fonctions analytiques", C. R. Acad. Scie., 182 : 255–257
Shapiro, J. H. (1993), Composition operators and classical function theory, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer-Verlag
Wolff, J. (1926), "Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent a cette région", C. R. Acad. Sci., 182 : 42-43
Wolff, J. (1926), "Sur l'itération des fonctions bornées", C. R. Acad. Sci., 182 : 200-201
Wolff, J. (1926), "Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz", C. R. Acad. Sci., 182 : 918-920

11 Fibrés vectoriels sur le cercle et sur la sphère

Titre : «Fibrés vectoriels sur le cercle et sur la sphère »

Director : Paulo CARRILLO ROUSE

Contact email : carrillo@math.univ-toulouse.fr

Résumé : Dans ce projet de topologie l'étudiant va :

1. Comprendre (surtout à travers les exemples ci-dessous) la définition de fibré vectoriel sur un espace topologique.
2. Dans le cas du cercle unité on calculera explicitement tous les possibles fibrés vectoriels réels à isomorphisme et homotopie près. On verra qu'en gros il y a que des sommes des rubans de Moebius ou des cylindres (les deux exemples initiales des fibrés vectoriels réels sur le cercle).
3. Dans le cas complexe on verra qu'à isomorphisme et homotopie près il n'y a que des fibrés triviaux (des cylindres !).
4. Pour la sphère de dimension 2 on verra une construction qui permet de produire des fibrés vectoriels sur la sphère à partir de fonctions de recollement sur l'équateur.

Pré-requis : Des bases de topologie de L3, M1 dévraient largement suffire. Une référence peut etre le livre online de Hatcher "Vector Bundles and K-theory", le chapitre 1.

12 Le tore non commutatif

Titre : «Le tore non commutatif »

Director :Paulo CARRILLO ROUSE

Contact email : carrillo@math.univ-toulouse.fr

Résumé : Dans ce projet de analyse fonctionnel et topologie l'étudiant va :

1. Comprendre la notion abstraite d'une C^*-algèbre complexe (une algèbre de Banach involutive qui satisfait une rélation très simple)(l'exemple de base est $C(X)$, l'espace des focntions continues d'un espace topologique compact dans les complexes avec la norme sup ou encore l'espace des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert avec la norme des opérateurs) et du spectre d'une telle algèbre (notion élémentaire d'analyse fonctionnel).
2. En utilisant un peu analyse de Fourier l'étudiant montrera que le spectre d'une algèbre canoniquement associée à $\mathbb{Z}$ est le cercle unité S^1.
3. On donnera un exemple explicite d'une C^*-algèbre noncommutative (appelée "Le Tore non commutatif") qui peut etre déformé (par un parametre réel) vers l'algèbre du tore.

Pré-requis : Des bases de topologie et analyse fonctionnel de L3, M1 dévraient largement suffire. Une référence peut etre le livre classique de Schwartz "Analyse I" pour la première partie et le livre et le livre de Khalkhali "Basics on noncommutative geometry" (chap1) pour la deuxième partie.

13 Cucker-Smale flocking dynamics

Encadrant P. Cattiaux

Résumé We present a simple proof on the formation of flocking to the Cucker-Smale system based on the explicit construction of a Lyapunov functional. Our results also provide a unified condition on the initial states in which the exponential convergence to flocking state will occur. For large particle systems, we give a rigorous justification for the mean-field limit from the many particle Cucker-Smale system to the Vlasov equation with flocking dissipation as the number of particles goes to infinity.

Des références pour le sujet Article S.-Y. Ha et J.G. Liu publié dans CMS.

14 Théorème de Shauder

Encadrant P. Cattiaux

Résumé Théorème du point fixe de Schauder et application à la résolution d'une EDP non linéaire sur R.

Background : cours Analyse fonctionnelle et cours Distributions.

Difficulté : assez forte. Reference :

Des références pour le sujet Un chapitre du polycopié de Le Dret accessible sur le net (env 20 pages) (taper théorème de Schauder sur g...)

Suivant les cas on pourra se restreindre à la preuve en dim finie (Brouwer) et à l'application (en zappant la preuve de Schauder)

15 L'équation des ondes : problème de Cauchy

Proposition de Projet M1 ESR

Titre: Solution explicite pour le problème de Cauchy associé à l'équation des ondes avec terme source: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$

On s'intéressera aux différentes méthodes de calcul de la solution explicie du probème de Cauchy associé à l'équation des ondes en présence d'un terme source(second membre). On utilisera en particulier une combinaison de la transformation de Fourier et la transformation de Laplace, la méthode de Duhamel, la méthode basée sur la solution élémentaire...etc.

Références:
1) Livre de L. C. Evans, Partial Differential Equations.
2) Livre de T. Myint-U and L. Debnath, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.

A. Chalabi
chalabi@math.univ-toulouse.fr

1

16 L'équation des ondes : problème aux limites

Proposition de Projet M1 ESR

Titre: Solutions explicites pour certains problèmes aux limites associés à l'équation des ondes: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$

On s'intéressera en particulier aux problèmes posés sur un demi-axe ou sur un intervalle.
Les conditions aux limites seront de type Dirchlet, Neumann ou mixtes.
La méthode utilisée est basée sur le prolongement des données initiales en fonctions paires ou impaires selon le type des conditions aux limites.

Références:
1) Livre de W. Strauss, Partial Differential Equations, An introdution.
2) Notes de cours: MATH 220A.

A. Chalabi
chalabi@math.univ-toulouse.fr

1

17 Expériences en analyse topologique des données

Title : «Expériences en analyse topologique des données»

Encadrant : «Francesco Costantino»

Mail : «francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr»

Résumé : Nous étudierons les “formes” de nuages de points dans $\mathbb{R}^n$ en essayant de calculer des invariants topologiques de base d’espaces qui leurs sont associés (complexes de Voronoi et Delaunai par example). Nous pourrons traiter des aspects plus “théoriques” (théorie de l’homologie simpliciale et homologie persistente) ou plus “appliqués” (complexité des algorithmes, leur implementation sur des packages Python) selon les intérêts du candidat.

Références

[BCY] Boissonnat, J.D., Chazal F., Yvinnec, M. *Geometric and Topological Inference*

[Dl] Dlotko, P. *Computational and applied topology, tutorial.* arXiv ://1807.08607v2 (2018).

[C] Carlsson, G. .*Topology and data*, Bull. of the A.M.S. Volume 46, Number 2, April 2009, Pages 255–308.

18 Modèle de battage de cartes

Encadrant L. Coutin

Résumé On étudie un modèle de battage de cartes. On cherche en particulier à déterminer le plus précisément possible le nombres de battages nécessaires pour obtenir un mélange satisfaisant du paquet.

Mots clefs : Chaîne de Markov, convergence vers une loi stationnaire, groupe symétrique.

Des références pour le sujet Epreuve de modélisation de l'agrégation.

19 Instabilités de Turing

Proposition de projet – M1

Thématique : instabilités de Turing

Résumé. L'objectif de ce projet est de se familiariser avec la notion de *d'instabilités de Turing* pour les systèmes de réaction-diffusion du type

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} & = \underbrace{D\Delta U}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\mathcal{R}(U)}_{\text{réaction}}, \quad x \in \Omega \\ & + \text{ conditions de bord} \end{cases} \tag{1}$$

où $U(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ régulière. On suppose qu'il existe un état stationnaire homogène (qui ne dépend pas de l'espace et du temps), noté U_*, solution de (1), c'est à dire $\mathcal{R}(U_*) = 0$. De plus, on se place dans le cadre où U_* est un point d'équilibre stable pour l'EDO associée à la partie réaction uniquement :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathcal{R}(U). \tag{2}$$

Le but du projet sera d'étudier l'effet de la diffusion sur la stabilité du point d'équilibre U_*. Pour cela, l'étudiant(e) intéressé(e) lira le chapitre 7 du livre de B. Perthame [1] et pourra compléter son étude avec des illustrations numériques.

Prérequis : bases d'analyse fonctionnelle et de séries/transformées de Fourier, notions élémentaires sur les EDOs.

Contact : gregory.faye@math.univ-toulouse.fr

Références

[1] B. Perthame. *Parabolic Equations in Biology : Growth, Reaction, Movement and diffusion.* Lecture Notes on Mathematical Modeling in the Life Sciences, Springer, 2015.

20 Caractérisations de propriétés des espaces L^p

Encadrant : Francis Filbet (francis.filbet@math.univ-toulouse.fr)

Résumé L'intégrabilité est la propriété de base pour pouvoir manipuler des fonctions de manière non triviale, faire des probabilités, de l'analyse de Fourier, etc. il convient donc de bien mettre en évidence les propriétés de ces fonctions, notamment en ce qui concerne les suites et séries qui sont les outils principaux de tout approximation. Ce projet correspond à une leçon d'agrégation sur le sujet.

On verra dans ce projet comment généraliser aux espaces L^p certains résultats que l'on a vu dans le cadre hilbertien

— Théorème de représentation de Riesz dans les espaces L^p,

— Analogue du théorème d'Ascoli-Arzéla pour dḿontrer des propriétés de compacité forte dans les espaces L^p : théorème de Kolmogorov.

On terminera si le temps le permet par des exemples d'applications.

Ce mémoire vise à renforcer les connaissances acquises en Analyse fonctionnelle et Analyse de Fourier. Il est principalement destiné aux étudiants désireux de poursuivre dans la recherche en Analyse.

Des références pour le sujet Epreuve d'analyse de l'agrégation.

Brezis, H. (2005), Analyse fonctionnelle. Dunod.

J.-M. Bony, Cours d'Analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'Ecole Polytechnique, 2015.

21 Equations aux dérivées partielles sur le segment $[0, 1]$.

Encadrant : Francis Filbet (francis.filbet@math.univ-toulouse.fr)

Résumé On considère des équations aux dérivées partielles, soit du type réaction-diffusion (EDP qui intervient par exemple dans des modèles de dynamique des populations ou de diffusion de composées chimiques), soit du type ondes (très bon modèle pour les vibrations d'une corde de guitare ou l'évolution de la pression dans le tube d'une flûte).

Dans un premier temps, nous utiliserons les séries de Fourier pour énoncer des théorèmes d'existence et unicité de solutions pour ces EDPs. La suite du stage sera modulable en fonction des envies du stagiaire : étude de la dynamique, écriture de programmes pour effectuer des simulations numériques, discussion sur des modèles basiques d'instruments de musique...

Ce mémoire vise à renforcer les connaissances acquises en Modélisation mathématiques, Analyse numérique et Analyse de Fourier. Il est principalement destiné aux étudiants désireux de poursuivre dans la recherche en Analyse appliquée.

Des références pour le sujet Epreuve d'analyse et modélisation de l'agrégation.

22 Le polynôme de Jones et ses généralisations

Projet M1

encadrant : Thomas Fiedler

domaine : Topologie

Titre : Le polynôme de Jones et ses généralisations

Il s'agit de définir, de montre l'invariance et d'étudier les relations entre les célèbres invariants de nœuds comme les polynômes de Jones, d'Alexander, d'HOMFLYPT et de Kauffman.

References :

Kauffman, Knots and physics, World Scientific 1991, Chapitre 1.1-1.6

Kauffman, State models and the Jones polynomial, Topology 1987

Likorish-Millett, A polynomial invariant of oriented links, Topology 1987

23 Classification des formes quadratiques

Encadrant S. Lamy

Résumé Le problème de la classification des formes quadratiques à équivalence près est un sujet classique, et la réponse dépend fortement du corps sur lequel on travaille. Sur C le seul invariant est le rang, et sur R c'est la signature. Le but de ce projet sera de comprendre les invariants nécessaires lorsqu'on travaille sur un corps fini, ou sur un corps p-adique. La classification sur le corps Q des rationnels s'appuie sur ces deux cas. Sans refaire la preuve complète de la classification sur Q, on pourra cependant définir les invariants et illustrer l'algorithme permettant de les calculer sur des exemples concrets.

Des références pour le sujet Caldero-Germoni, "Histoires hédonistes de groupes et géométrie", vol 1, Chapitre V. Serre, "Cours d'arithmétique", chap I-IV. Seguins-Pazzis "Invitation aux formes quadratiques".

24 Sous-groupes finis de SO(3,R) et SO(4,R)

Encadrant S. Lamy

Résumé Le groupe SO(3,R) est le groupe des rotations de l'espace euclidien de dimension 3. Ses sous-groupes finis sont liés aux groupes de symétrie des cinq solides platoniciens. Le but de ce projet sera de comprendre puis prolonger ce résultat de classification en dimension 4. Le groupe SO(4,R), tout comme le groupe SO(3,R), se comprend de manière efficace à l'aide du corps des quaternions. Après ce résultat théorique établi, on cherchera à dresser une liste de tous les sous-groupes finis de SO(4,R), et éventuellement à faire le lien avec certains polyèdres réguliers en dimension 4.

Des références pour le sujet Caldero-Germoni, "Histoires hédonistes de groupes et géométrie", vol 1, Chapitre VII. Conway-Smith, "On quaternions and octonions", chapter II.

25 Quasi-isométries

Encadrant S. Lamy

Résumé La théorie géométrique des groupes se propose d'étudier les groupes comme des objets géométriques, notamment en associant à un groupe finiment engendré son graphe de Cayley. La notion de quasi-isométrie se révèle être la bonne notion d'équivalence entre espaces métriques dans ce contexte : la classe de quasi-isométrie du graphe de Cayley ne dépend pas d'un choix de générateurs, mais la notion est cependant suffisamment fine pour refléter des propriétés du groupe. Le but de ce projet sera d'explorer cette notion à travers les 20 pages du chapitre 7 du livre "Office hours with a geometric group theorist", en rédigeant des réponses pour les nombreux exercices proposés au fil du texte, et éventuellement en abordant l'un des projets plus ambitieux mentionnés en fin de chapitre.

Des références pour le sujet "Office hours with a geometric group theorist", chapter 7.

26 Le principe de concentration-compacité

Le principe de concentration-compacité

Encadrant :
Stefan LE COZ, Maître de conférences
slecoz@math.cnrs.fr
http://www.math.univ-toulouse.fr/~slecoz/

Lieu : Institut de Mathématiques de Toulouse

Niveau : Master 1

Description du projet :

Le concept de compacité est l'un des concepts centraux en topologie et a de nombreuses applications. Par exemple, on utilise la compacité pour montrer qu'une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes. Dans de nombreuses situations d'analyse mathématique, il est essentiel de se placer dans un cadre "compact". C'est aisé en dimension finie, puisque tout fermé borné y est compact, mais délicat en dimension infinie, dans les espaces de fonctions par exemple.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'une des méthodes introduites pour travailler dans des situations "non-compactes", la méthode de concentration-compacité, qui a été notamment développée par Pierre-Louis Lions au début des années 1980. Cette méthode repose sur l'idée suivante : dans un cadre non-compact, la perte de compacité est souvent due à un mécanisme simple qu'il est possible de neutraliser. Par exemple, une suite de fonctions constituée de la même fonction dont le support serait translaté vers l'infini est convergente à translation près. La décomposition en profils est un raffinement autour de cette idée.

Le travail se déroulera en deux temps. Tout d'abord, on s'intéressera à un modèle jouet présenté par Terence Tao sur son blog pour comprendre la notion de décomposition en profils en utilisant des outils d'analyse fonctionnelle élémentaires. Ensuite, on étudiera le résultat principal de concentration compacité de Pierre-Louis Lions, présenté dans le livre d'Otared Kavian.

Références :

— *Concentration compactness and the profile decomposition*, Terence Tao, http://goo.gl/rK7NJS
— *Introduction à la Théorie des Points Critiques*, Chapitre 6, Section 8, Otared Kavian, 1993, Springer, ISBN :978-3-540-59619-6.

27 Le théorème de rigidité de Cauchy

LE THÉORÈME DE RIGIDITÉ DE CAUCHY

STAGE PROPOSÉ PAR JEAN-PIERRE OTAL

Ce théorème dit que si P et P' sont deux polyèdres convexes et combinatoirement équivalents de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ tels que leurs faces congruentes sont isométriques, alors P et P' sont isométriques. En particulier, toute déformation $t \mapsto P_t$, pour $t \in]-1, 1[$, d'un polyèdre convexe P_0 dans $\mathbb{R}^3$ qui préserve la forme de ses faces, est "triviale", c'est-à-dire de la forme $t \mapsto g_t(P)$, avec $t \mapsto g_t$ un chemin d'isométries euclidiennes. C'est un exemple de théorème de rigidité : une partie de toute l'information donnée par le polyèdre convexe (dans ce cas, la forme de ses faces) suffit à le déterminer complètement à isométries près. La démonstration est basée sur un argument local (comparaison des angles dièdres du polyèdre le long des arêtes congruentes) et sur un argument global (une propriété des graphes planaires).

On pourra par la suite étudier les polyèdres (nécessairement non-convexes) que l'ont peut déformer de façon non-triviale, en commençant par montrer qu'il en existe (un résultat de Robert Connelly).

Références :

Aigner M. et Ziegler G., "Proofs from the Book", Springer, 1999.

Connelly R., "A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra", Publications de l'IHÉS, 1977, p. 333–338

Connelly R., Sabitov I., Walz A. "The bellows conjecture", Beiträge Algebra Geom., 38, p. 1.10.

Pak I. "Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry", sur la page de l'auteur : http://www.math.ucla.edu/ pak/book.htm

28 Le Théorème de point fixe de Lefschetz (J. P. Otal)

LE THÉORÈME DE POINT FIXE DE LEFSCHETZ

Le théorème de Lefschetz donne un critère pour l'existence d'un point fixe d'une application continue d'un espace topologique dans lui-même. Il s'énonce avec l'homologie et on commencera par définir et étudier les propriétés de base des groupes d'homologie simpliciale $H_i(X)$ de certains espaces topologiques appelés les complexes simpliciaux. Les groupes d'homologie sont des groupes abéliens, de dimension finie lorsque le complexe X est fini. Ces groupes sont des foncteurs, en particulier si f est une application continue de X dans lui-même, f induit un homomorphisme $H_i(f)$ de $H_i(X)$ dans lui-même. Le nombre de Lefschetz de f, $\Lambda(f)$ est alors défini (essentiellement) comme la somme alternée des traces des $H_i(f) : H_i(X) \to H_i(X)$. Le théorème de Lefschetz est que si le nombre de Lefschetz est non-nul, alors f a (au moins) un point fixe. Une version plus précise est une formule qui relie $\Lambda(f)$ au "nombre" de points fixes de f a un nombre fini de points fixes.

Références :

Hatcher, A. "Algebraic Topology" , Cambridge University Press 2002, aussi sur la page de l'auteur : https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html

Munkres, J. "Elements of Algebraic Topology", Westview press

Spanier, E. "Algebraic Topology", Springer.

29 Recuit simulé et le voyageur de commerce

Encadrant C. Pellegrini

Résumé Un voyageur de commerce (de luxe et pas écolo) doit se rendre dans plusieurs villes par avion. Il connaît les distances entre toutes les villes et voudrait déterminer l'ordre dans lequel il doit faire ses visites pour minimiser la distance parcourue (et donc le coût de la tournée).
Mots-clefs : Chaîne de Markov, loi stationnaire, graphe, permutation.

Des références pour le sujet Epreuve de modélisation de l'agrégation.

30 Trois projets proposés par Jacques Sauloy

Université Paul Sabatier 2018/2019

M1 ESR : Propositions de sujets de travail autonome

Représentations des groupes symétriques et des groupes linéaires finis

Les deux principales classes de groupes finis non commutatifs sont les groupes symétriques el les groupes linéaires sur les corps finis. Leurs représentations sont codées par des objets combinatoires fascinants, et permettent d'illustrer la puissance de la théorie des représentations.

Référence principale : “Representation Theory” de William Fulton et Joe Harris.

Équations algébriques résolubles par radicaux

La non-résolubilité par radicaux de l'équation générale du cinquième degré, et encore plus l'invention de la théorie des groupes par Galois pour donner un critère général, font partie des merveilles des mathématiques. Le livre d'Artin est l'un des plus beaux exposés de la théorie.

Référence principale : “Galois Theory” de Emil Artin.

Empilement de sphères et géométrie des nombres

Avant que la conjecture de Kepler (optimalité de l'empilement “naturel” des oranges) soit enfin démontrée en 1998 par Thomas Hales, C. Ambrose Rogers disait que “many mathematicians believe and all physicists know” (que c'était vrai). La géométrie des nombres, inventée par Minkowski et Hermite, permet de résoudre des problèmes d'empilement mais aussi de prouver des théorèmes d'arithmétique (par exemple sur les équations diophantiennes, sur les classes d'idéaux des corps de nombres ...).

Référence principale : “An Introduction to the Geometry of Numbers” de J.W.S. Cassels.

Loi de groupe sur une cubique projective non singulière

Parmi les joyaux hérités des mathématiques du dix-neuvième siècle figure la version algébrique des théorèmes d'addition des intégrales elliptiques (qui ont donné naissance à la géométrie algébrique) : toute courbe algébrique plane lisse de degré 3 est naturellement munie d'une structure de groupe. Ce théorème relie la géométrie algébrique affine et projective (théorème de Bézout) à la théorie des fonctions analytiques (fonctions elliptiques).

Références principales : “Algebraic Curves” de William Fulton et “Elliptic Functions” de Serge Lang.

1

31 Algèbre des polyèdres

Encadrant : Joseph Tapia

Résumé Dans le plan euclidien deux polygones sont dits équivalents ou congrus, si par découpages en polygones, concaténations de polygones et déplacements d'iceux, on peut rammener l'un à l'autre. C'est un fait élémentaire que deux polygones sont congrus si et seulement si ils ont la même aire. Cette notion d'équivalance se généralise en dimension supérieure. En particulier dans son troisième problème, D. Hilbert pose la question en dimension 3 de trouver deux polyèdres ayant même volume est cependant non congrus. Cette question a été résolue par M. Dehn dès 1911. A coté du volume, il construit un invariant de la classe de congruence, l'invariant de Dehn, et donne l'exemple d'un cube et d'un tétraèdre de même volume et d'invariant de Dehn différents.

En fait on peut démontrer que *volume* et *invariant de Dehn* forment un système complet d'invariants des classes de congrence des polyèdres.

Ce qui est proposé à l'éventuel étudiant est :

1) de comprendre la construction de l'invariant de Dehn,

2) et si possible de comprendre plus profondément que *volume* et $invariantdeDehn$ forment un invariant complet. Cette partie est bien sûr plus difficile.

Pour mener à bien ce travail, l'étudiant devra étudier :

a) la géométrie affine euclidienne et la géométrie des polyèdres (enveloppes convexes, angles dièdres, etc.)

b) s'initier à la notion de groupe abélien défini par générateurs et relations et de produit tensoriel de groupes abéliens,

c) enfin apprendre quelque rudiments de théorie de Galois si possible.

[1] E. Artin, Algèbre géométrique, Gauthier-Villar, Paris, 1978.

[2] P. Cartier, Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert. Séminaire Bourbaki, exp. No 646, Astérique 133-134, 1985, pp.261-288.

[3] D. Hilbert, Sur les problèmes futurs des mathématiques, Ed. Jacques Gabay

[4] Borge Jenssen, The algebra of polyhedra an Sydler's theorem, Math. Scan. 22, 1968, pp. 241-256.

[5] J.-P Sydler, Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Com.Math. Helvitici, 40, 1965-1966.