ALGEBRE L3

GROUPES

Cours Printemps 2018

Plan

1. Groupes, homomorphismes. Catégorie de groupes.
Sous-groupes, normaux.
Exemples. S_n. Groupes linéaires: $GL_n, SL_n, O(n), U(n)$.
Groupes quotients.
Produit direct, semi-direct.

2. Action d'un groupe sur un ensemble.
Théorème de Lagrange.
Formule de classes.
Théorèmes de Sylow.
Exercice: tout corps fini est commutatif.

3. Groupe symétrique S_n.

4. Sous-groupes finis de $SO(3), SU(2)$.

5. Groupes abéliens finis.

Bibliographie

S.Lang, Algèbre
Ramis, Warusfel L3, M1

§1

Groupes, homomorphismes. Catégorie de groupes.

Sous-groupes, normaux.

Théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément.

Groupes d'ordre p premier.

Groupes d'ordre $n \leq 5$.

Groupe S_n (définition).

§2

Action d'un group sur un ensemble; $G\backslash X$, X/G.

Exercice. Soit
$$H = \{z \in \mathbb{C} |\ \Im(z) > 0\}.$$
(a) Le groupe $G = SL_2(\mathbb{R})$ agit sur H:
$$z \mapsto gz = \frac{az+b}{cz+d}$$
(justifier).

(b) Montrez que
$$H \overset{\sim}{=} G/K$$
où $K = SO(2)$.

Le goupe quotient. Propriété universelle de G/H.

Exercice obligatoire. Un sous-groupe d'indice 2 est normale.

Théorème d'isomorphisme: si $f : G \longrightarrow H$ est un homomorpisme de groupes, alors $f(G) \overset{\sim}{=} G/\operatorname{Ker}(f)$.

§3

Action d'un group G sur G par conjugaison. Classes de conjugaison.

Le centre $Z(G)$.

Exercice. Le centre de $GL_n(K)$ est $K^* \cdot I$.

Produit de deux groupes $G_1 \times G_2$.

§4.

Produit semii-direct.

Exemple: $S_3 = \mathbb{Z}/3 \times_\tau \mathbb{Z}/2$.

Groupe diédral D_n. Exemple: triangle et S_3: $D_6 \overset{\sim}{=} S_3$.

§5. Groupe symétrique

Groupe symétrique S_n. Signe d'une permutation comme le determinant.

Générateurs: $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$, relations: $s_i^2 = e$, $(s_i s_j)^2 = e$ si $|i-j| > 1$, et $(s_i s_{i+1})^3 = e$.

Chaque permutation est un produit de cycles disjoints.

Conjugaison:

$$\sigma(12\ldots k)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k))$$