Janvier 2017 — Université de Toulouse 3

L3 MAF et Parcours spécial

Examen - Analyse numérique

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Durée : 3h.

Question de cours. Donner la définition de la stabilité par rapport aux erreurs d'un schéma numérique à un pas et donner une condition suffisante de stabilité.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive.

2. Calculer la décomposition de Choleski de A.

Exercice 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_d(\mathbb{R})$ induite par une norme sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que pour toute matrice carrée M, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|M^n\|^{1/n} = \rho(M),$$

où $\rho(M)$ désigne de rayon spectral de M. Soit $c \in \mathbb{R}^d$ et $B \in M_d(\mathbb{R})$ vérifiant $\rho(B) < 1$. On introduit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$x_{n+1} = Bx_n + c.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $x^* = Bx^* + c$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\|x_n - x^*\| \leqslant (\rho(B) + \varepsilon)^n \|x_0 - x^*\|$$

Exercice 3. Soit P un polynôme s'écrivant

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k},$$

où les α_k sont deux-à-deux distincts et $m_k \geqslant 1$. On suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$. On cherche à approcher numériquement la plus grande racine α_r de P par la méthode de Newton. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $x_0 > \alpha_r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad \text{où} \qquad f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

1. Montrer que pour tout x différent des α_k,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{x - \alpha_k}.$$

2. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que P' puis P'' ont leur racine dans $[\alpha_1, \alpha_r]$.
3. Montrer que pour tout $x > \alpha_r$, $P(x) > 0$, $P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$.
4. En déduire que pour tout $x > \alpha_r$, $f'(x) > 0$.
5. Montrer que f se prolonge par continuité en posant $f(\alpha_r) = \alpha_r$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $x_n > \alpha_r$.
7. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
8. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_r.
9. Montrer que $f'(\alpha_r) = 1 - 1/m_r$.
10. Supposons dans cette question que $m_r = 1$. En utilisant une formule de Taylor appliquée à f, montrer que pour tout $c > 0$, on a $|x_n - \alpha_r| \leqslant c^n$.
11. Supposons dans cette question que $m_r \geqslant 2$.
    1. Montrer que pour tout $c \in]|f'(\alpha_r)|, 1[$, $|x_n - \alpha_r| \leqslant c^n$.
    2. En utilisant une formule de Taylor, montrer que la série de terme général $\log|x_{n+1} - \alpha_r| - \log|x_n - \alpha_r| - \log|f'(\alpha_r)|$ est convergente.
    3. En déduire qu'il existe $d > 0$ tel que $|x_n - \alpha_r| \sim d(1 - 1/m_r)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné. La fonction $f \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ vérifie la condition de Lipschitz

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leqslant L\,|v - w| \quad \text{pour tous } \ v, w \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ t \in [0, T].$$

On approche numériquement (1) par le schéma d'Euler modifié

$$\begin{cases} u_{n+1/2} = u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n), \\ u_{n+1} = u_n + h f(t_n + h/2, u_{n+1/2}), \end{cases} \tag{2}$$

pour $n = 0, 1, 2\ldots$ et en posant $t_{n+1} - t_n = h > 0$.

1. Vérifier que le schéma (2) s'écrit sous la forme général d'un schéma à un pas

$$u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n, h) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2\ldots \tag{3}$$

   où $F(t, v, h) = f(t + h/2, v + \frac{h}{2} f(t, v))$.
2. Montrer que le schéma est consistant.
3. Établir la convergence du schéma (2)

4. On rappelle que d'une manière générale si $f \in C^p([0,T] \times \mathbb{R})$ et si $F \in C^p([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ le schéma à un pas est consistant d'ordre $p \geqslant 1$ sous la condition

$$\frac{\partial^m F}{\partial h^m}(t,v,0) = \frac{f^{(m)}(t,v)}{m+1} \quad \text{pour } 0 \leqslant m \leqslant p-1, \tag{4}$$

où $f^{(m)}(t,v)$ est défini par récurrence :

$$f^{(m+1)}(t,v) = \frac{\partial f^{(m)}}{\partial t}(t,v) + \frac{\partial f^{(m)}}{\partial v}(t,v) f(t,v) \quad \text{pour } m \geqslant 0, \tag{5}$$

avec $f^{(0)}(t,v) = f(t,v)$.

Dans ce cadre général, vérifier que la solution u est telle que

$$u^{(m+1)}(t) = f^{(m)}((t,u(t)) \quad \text{pour } 0 \leqslant m \leqslant p \tag{6}$$

5. Montrer que le schéma d'Euler modifié (2) est d'ordre 2.
6. On considère maintenant le schéma d'Euler implicite

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2 \ldots \tag{7}$$

   a. Mettre le schéma (7) sous la forme générale (3) et vérifier qu'il est bien défini.
   b. Établir que le schéma est convergent d'ordre 1.