Examen - Analyse numérique

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Durée : 3h.

Question de cours. Indiquer le principe de la méthode des moindres carrés pour résoudre le système $Ax = b$ où A est une matrice réelle $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive.
2. Calculer la décomposition de Choleski de A.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices réelles d'ordre N et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^N$. On considère la méthode itérative suivante pour $k \geqslant 0$:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= By_k + a \\ y_{k+1} &= Ax_k + b \end{cases},$$

avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^N$ donnés.

1. Soit $z_k = (x_k, y_k)^T$. Montrer que le système ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

   $$z_{k+1} = Cz_k + c,$$

   où C est une matrice d'ordre $2N$ et c un vecteur de $\mathbb{R}^{2N}$ seront à expliciter.
2. Montrer que $\rho(C)^2 = \rho(AB)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la méthode converge.
3. On considère maintenant la méthode itérative suivante :

   $$\begin{cases} x_{k+1} &= By_k + a \\ y_{k+1} &= Ax_{k+1} + b \end{cases}.$$

   En écrivant cette méthode sous la forme $z_{k+1} = Dz_k + d$ et en calculant le rayon spectral de D, donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode converge.
4. On appelle taux de convergence asymptotique d'une matrice M le nombre

   $$R(M) = -\ln(\rho(M)).$$

   On pose $e_k = z_k - z^*$ où z^* est la limite de $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que le nombre d'itérations k pour réduire l'erreur d'un facteur ε c'est-à-dire avoir $\|e_k\|/\|e_0\| \leqslant \varepsilon$ vérifie

$$k \geqslant \frac{|\ln \varepsilon|}{R(M)}.$$

(b) Comparer le taux de convergence des deux méthodes itératives ci-dessus.

Exercice 3. Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que si $n \geqslant 1$, alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
2. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant C|u_n - a|^2.$$

Exercice 4. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \text{pour } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné. La fonction $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$ vérifie la condition de Lipschitz

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leqslant L\,|v-w| \quad \text{pour tous} \quad v, w \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t \in [0,T].$$

On approche numériquement (1) par le schéma de Heun :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\Big\{ f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)\Big\} \tag{2}$$

pour $n = 0, 1, 2 \dots, N$, en posant $h = \frac{T}{N+1}$ et $t_{n+1} = t_n + h$.

1. Vérifier que le schéma (2) s'écrit sous la forme générale d'un schéma à un pas

$$u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n, h) \quad \text{pour } n = 0, 1, 2 \dots$$

en donnant l'expression de $F(t, v, h)$. Vérifier que le schéma est consistant.

2. Montrer que le schéma (2) est stable et convergent.
3. Le schéma (2) est-il d'ordre 2 ?