Examen - Analyse numérique

La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.
Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.
Durée : 2h.

Question de cours. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire $Ax = b$ ainsi que le système perturbé $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Démontrer l'estimation d'erreur :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \mathrm{Cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|},$$

où $\mathrm{Cond}(A)$ désigne le conditionnement de A pour la norme associée à $\|\cdot\|$.

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que la méthode de Jacobi associée à cette matrice converge, en calculant le rayon spectral de la matrice d'itération correspondante.

Exercice 2. Soit le système linéaire $Mx = b$ avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que ce système n'a pas de solution.
2. Afin de trouver une solution au sens des moindres carrés, écrire l'équation normale du système linéaire précédent.
3. Déterminer les solutions de l'équation normale.
4. Calculer une décomposition en valeurs singulières de la matrice M.
5. Calculer l'inverse généralisé de M, noté $M^\dagger$.
6. Calculer $M^\dagger b$.

Exercice 3.

1. Rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir l'existence et l'unicité de L et U dans la factorisation LU.
2. On suppose L et U connues dans la factorisation LU d'une matrice A. Écrire l'algorithme de résolution de $Ax = b$ avec b donné.

3. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer la décompostion LU de A.

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Pour résoudre l'équation linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n), \qquad x_0 \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est $A^{-1}b$.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$. Montrer que

$$e_n = (I - \alpha A)^n e_0.$$

3. Montrer que la méthode est convergente si et seulement si

$$\mathrm{Sp}(A) \subset B(1/\alpha, 1/|\alpha|),$$

où $B(1/\alpha, 1/|\alpha|)$ désigne la boule ouverte de centre $1/\alpha$ et de rayon $1/|\alpha|$.

4. Montrer que si A est définie positive alors la méthode ci-dessus converge si α est choisi strictement positif et petit.