L3 ESR Novembre 2016.

Contrôle Continu
Analyse Numérique

Question de cours. Soit A une matrice réelle $n \times n$ inversible. On munit l'ensemble de matrices réelle $n \times n$ d'une norme $\|\cdot\|$ consistante avec la norme $\|\cdot\|$ choisie sur $\mathbb{R}^n$. Par différence entre le système

$$Ax = b$$

et le système perturbé

$$A(x+\delta x) = b + \delta b,$$

il vient

$$(1) \quad \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$$

en utilisant la consistance de la norme sur les matrices. De plus

$$(2) \quad \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

En comparant (1) et (2), il résulte

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

où, par définition, $\|A\| \, \|A^{-1}\| = \mathrm{Cond}(A)$ est le conditionnement de A □.

Exercice 1

On utilise la décomposition $A = D - E - F$ où D est la matrice diagonale dont les entrées diagonales sont celles de A, $-E$ (resp. $-F$) est la partie triangulaire inférieure (resp. supérieure) de A. Pour résoudre le système $Ax = b$, l'itération de Jacobi s'écrit

$$(1) \quad x_{k+1} = D^{-1}(E+F)x_k + D^{-1}b = Jx_k + c,$$

en notant J la matrice de l'itération :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J sont les racines de

$$\det(J - \lambda I_3) = -(\lambda - 1/4)^2(\lambda + 1/2) = 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{spec}\, J = \{1/4, -1/2\}$. Aussi le rayon spectral vaut

$$\rho(J) = \max_{\lambda \in \mathrm{spec}\, J} |\lambda| = 1/2$$

et $\rho(J) < 1$, ce qui est une CNS de convergence de la méthode.

Exercice 2

1. La 3ème équation du système rectangulaire

$$(1) \quad Mx = b$$

s'écrit $0 = 1$, ce qui est absurde. Le système (1) n'admet donc pas de solution.

2. L'équation normale pour résoudre (1) est $M^TMx = M^Tb$. Ici $M^TM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^Tb = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation normale est donc

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. La matrice du système (2) est inversible et l'équation normale admet pour unique solution

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Les valeurs singulières de M (rangées par ordre décroissant) sont $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$. Par le théorème spectral

$$U^TM^TMU = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{pmatrix}$$

où la matrice $U \in O_2$. Les colonnes u_i de U sont des vecteurs propres de M^TM :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = \dfrac{Mu_1}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \dfrac{Mu_2}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 orthogonal à v_1 et v_2 de sorte que

$$V = (v_1 \; v_2 \; v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O_3$$

En posant

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient par construction la DVS de M suivante :

$$M = V^T\Sigma U.$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que la décomposition n'est pas unique.

5. L'inverse généralisé de M est donné par la formule

$$M^+ = U^T\Sigma^+V \quad \text{où} \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$M^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 – Finalement

$$M^+ b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

On retrouve la solution de l'équation normale.

Exercice 3

1 – Il existe une décomposition LU de $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls :

$$\det A(1:k,1:k)\neq 0 \qquad k=1,2,\dots n$$

Quand elle existe la décomposition LU est unique.

2 – La résolution du système $Ax=b$ se décompose en un algorithme de descente pour résoudre le système triangulaire $Ly=b$ puis d'un algorithme de remontée pour le système triangulaire $Ux=y$. L'algorithme de remontée est le suivant (celui de descente est analogue) :

```
x_n = y_n/u_nn
pour i=n-1:1  par pas de -1
    x_i = y_i
    pour k=i+1:n
        x_i = x_i - u_ik x_k
    fin
    x_i = x_i/u_ii
fin
```


3. Il vient $M_1 A = A'$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\1/3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&8/3&-4/3\\0&-4/3&8/3\end{pmatrix}$$

puis $M_2 A' = U$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&8/3&-4/3\\0&-4/3&8/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&8/3&-4/3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

donc :

$$L^{-1}=M_2M_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/3&1&0\\1/2&1/2&1\end{pmatrix}$$

puis

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/3&1&0\\-1/3&-1/2&1\end{pmatrix}$$

D'où la décomposition LU de A :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/3&1&0\\-1/3&-1/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&8/3&-4/3\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

Exercice 4

1 – Si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors par passage à la limite dans l'itération : $x = x+\alpha(b-Ax)$, c-à-d. $b-Ax=0$ car $\alpha\neq 0$, donc $x=A^{-1}b$ car A inversible –

2 – La quantité $e_n = A^{-1}b - x_n$ représente l'erreur au pas n. Or $e_{n-1}=A^{-1}b-x_{n-1}$ et par différence $e_n = e_{n-1}-(x_n-x_{n-1})$. Utilisons l'itération :

$$\begin{aligned} e_n &= e_{n-1} - \alpha(b-Ax_{n-1}) \\ &= e_{n-1} - \alpha A(A^{-1}b - x_{n-1}) \\ &= (I-\alpha A)e_{n-1} = (I-\alpha A)^2 e_{n-2}\cdots \\ &= (I-\alpha A)^n e_0 . \end{aligned}$$

3 – La méthode s'écrit $x_{n+1}=Bx_n+c$ où $B=I-\alpha A$ et $c=\alpha b$. Elle converge si et seulement si $\rho(B)<1$. Or $\mu\in \mathrm{Spec}\,B$ équivaut à $\mu=1-\alpha\lambda$ avec $\lambda\in\mathrm{Spec}\,A$. Il y a donc convergence si et seulement si pour tout $\lambda\in\mathrm{Spec}\,A$ $|1-\alpha\lambda|<1$ soit $|1/\alpha-\lambda|<1/|\alpha|$ donc $\lambda\in B(1/\alpha, 1/|\alpha|)$.

4. Si A est définie positive, ses valeurs propres :

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\lambda_n>0$$

La CNS de convergence s'écrit

$$|1-\alpha\lambda_i|<1 \qquad i=1,2,\dots,n$$

Or $\alpha>0$ et $\lambda_i>0$ donc $1-\alpha\lambda_i<1$ et la convergence a lieu si et seulement si

$$1-\alpha\lambda_i>-1$$

soit

$$\alpha<2/\lambda_i \qquad i=1,2,\dots n$$

autrement dit

$$0<\alpha<2/\lambda_1 .$$