Janvier 2017 : CORRIGÉ EXAMEN ANALYSE NUMERIQUE

(1)

Exercice 1 :

1) A est symétrique et de plus :
$$\langle Ax, x\rangle = (x_1 - 2x_2)^2 + (2x_2 - 3x_3)^2 + 16x_3^2.$$
Donc pour $x \neq 0$, $\langle Ax, x\rangle > 0$.

2) On identifie les coefficients de L vérifiant $A = LL^t$. On trouve :
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

1) $\rho(B) < 1$ donc $I - B$ est inversible. D'où l'existence et l'unicité de x^*.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{1/n} = \rho(B)$,
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\|B^n\|^{1/n} \leq \rho(B) + \varepsilon$.
Or, $x_{n+1} - x^* = B(x_n - x^*)$, donc par récurrence : $x_n - x^* = B^n(x_0 - x^*)$. D'où
$\|x_n - x^*\| \leq \|B^n\| \|x_0 - x^*\| \leq (\rho(B) + \varepsilon)^n \|x_0 - x^*\|$.

Ex3

1) On a : $(\log|P|)' = \frac{P'}{P}$ et
$\log|P| = \sum_k m_k \log|X - \alpha_k|$
Donc $(\log|P|)' = \sum_k \frac{m_k}{X - \alpha_k}$
D'où $\frac{P'}{P} = \sum_k \frac{m_k}{X - \alpha_k}$

2) Entre chaque racine de P, on applique le théorème de Rolle ce qui donne $r-1$ racines pour P'. De plus, la multiplicité de α_k comme racine de P' est $m_k - 1$. Au total, on a donc $r - 1 + \sum_k (m_k - 1) = n - 1$ racines pour P' donc on a toutes les racines de P' et elles sont toutes dans $[\alpha_1, \alpha_r]$. De même pour P''.

3) Comme P est unitaire et que P ne s'annule pas sur $]\alpha_r, +\infty[$, on a $P(x) > 0$ pour $x > \alpha_r$. De même, le coefficient de plus haut degré de P' et P'' est > 0, donc même conclusion.

4) Un calcul donne
$$f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2},$$
d'où le résultat d'après 3).

(2)

5) D'après 1), $\lim_{\alpha_r} \frac{P}{P'} = 0$.
D'où le résultat.

6) On raisonne par récurrence.
$$H_n = (x_n \text{ est bien défini et } x_n > \alpha_r).$$
H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que H_n est vraie. Alors $P'(x_n) \neq 0$ donc x_{n+1} est bien défini et
$$x_{n+1} = f(x_n) > f(\alpha_r) = \alpha_r.$$
D'où H_{n+1}.

7) On raisonne par récurrence.
$$H_n = (x_{n+1} < x_n).$$
Pour $n = 0$, c'est vrai car $\frac{P(x_0)}{P'(x_0)} > 0$.
Puis l'hérédité est vraie car f est strictement croissante.

8) $(x_n)_n$ converge d'après 6) et 7). Sa limite ℓ vérifie $\ell \geq \alpha_r$ et $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = \alpha_r$.

9) D'après 1), $\left(\frac{P}{P'}\right)' = \frac{\sum \frac{m_k}{(x-\alpha_k)^2}}{\left(\sum \frac{m_k}{x - \alpha_k}\right)^2} \xrightarrow[x \to \alpha_k]{} \frac{1}{m_k}$

(3)

Donc $\lim_{\alpha_r} f' = 1 - \frac{1}{m_r}$.

10) Si $m_r = 1$ alors $f'(\alpha_r) = 0$.
On applique la formule de Taylor :
$\exists c_n \in]\alpha_r, x_n[$, $x_{n+1} - \alpha_r = (x_n - \alpha_r) f'(c_n)$
Comme $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_r$, on déduit que si $c > 0$, alors :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |x_{n+1} - \alpha_r| \leq c\,|x_n - \alpha_r|$$
D'où le résultat.

11) 1. Même argument que 10).
2. D'après une formule de Taylor :
$$x_{n+1} - \alpha_r = (x_n - \alpha_r)\left(1 - \frac{1}{m_r}\right) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha_r)^2 f''(c_n)$$
avec $c_n \in]\alpha_r, x_n[$. En prenant le log :
$$\log|x_{n+1} - \alpha_r| = \log|x_n - \alpha_r| + \log\left(1 - \frac{1}{m_r}\right) + \log\left(1 + \frac{x_n - \alpha_r}{2|f'(\alpha_r)|} f''(c_n)\right)$$
Or $\left|\log\left(1 + \frac{x_n - \alpha_r}{2|f'(\alpha_r)|} f''(c_n)\right)\right| \leq M|x_n - \alpha_r| \leq M C^n$
et cela d'après 11) 1. D'où le résultat.

12) On somme la série et on obtient le résultat

Exercice 4

1- le schéma d'Euler modifié s'écrit

$$u_{n+1} = u_n + h\, f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)\right)$$

Il est donc de la forme générale (3) des schémas à un pas en posant

(8) $F(t, v, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v)\right)$

Observons tout de suite que puisque le second membre de l'edo (1) est de classe C^2 par rapport à l'ensemble de ses variables, il en est de même de F défini en (8).

2- Une condition suffisante de consistance du schéma (3) par rapport à l'edo (1) est

(9) $F(t, v, 0) = f(t, v) \quad \forall t \in [0, T], v \in \mathbb{R}$

Cette dernière propriété est bien vérifiée par la fonction F définie en (8). D'où la consistance du schéma (2).

3- Le schéma est convergent s'il est consistant et stable. Vérifions la stabilité. On sait qu'il suffit que la fonction F soit lipschitzienne par rapport au second argument. Or, par définition

$F(t, v, h) - F(t, w, h) =$

$$= f\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v)\right) - f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2} f(t, w)\right)$$

et d'après la propriété de Lipschitz de f :

$$|F(t, v, h) - F(t, w, h)| \leq L\left\{|v - w| + \frac{h}{2}|f(t, v) - f(t, w)|\right\}$$

En réutilisant la propriété de Lipschitz de f :

$$|F(t, v, h) - F(t, w, h)| \leq L\left\{1 + \frac{hL}{2}\right\}|v - w|$$

Soit $h^* > 0$:

$$|F(t, v, h) - F(t, w, h)| \leq L\left(1 + \frac{h^* L}{2}\right)|v - w|$$

pour tous $h^* \in]0, h^*[$, $t \in [0, T]$, $v, w \in \mathbb{R}$.
D'où l'assertion et le schéma est stable donc convergent.

4- Vérifions (6) par récurrence. Puisque u est solution de l'edo (1)

$$u'(t) = f^{(0)}(t, u(t)).$$

La propriété est vraie pour $m = 0$. Supposons

$$u^{(m-1)}(t) = f^{(m-1)}(t, u(t))$$

pour $m \geq 1$. En dérivant cette relation, il vient grâce au théorème de dérivation d'une fonction composée :

$$u^{(m)}(t) = \frac{d f^{(m-1)}}{dt}(t, u(t)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial v}(t, u(t))\, u'(t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f}{\partial v}(t, u(t))\, f(t, u(t))$$

en utilisant encore une fois que u est solution. Par définition de $f^{(m)}$, cette dernière égalité s'écrit $u^{(m)}(t) = f^{(m)}(t, u(t))$. et la récurrence est vérifiée

5. La condition suffisante de consistance à l'ordre 2 du schéma (2)

(10) $\frac{\partial^m F}{\partial h^m}(t, v, 0) = \frac{f^{(m)}(t, v)}{m+1} \qquad m = 0, 1.$

où F est définie par (8). La condition $m = 0$ est la propriété de consistance (9) déjà vérifiée. Partant de (8), il vient par dérivation.

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t, v, h) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v)\right) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial v}\left(t + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t, v)\right) \times \frac{1}{2} f(t, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial h}(t, v, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, v) + \frac{\partial f}{\partial v}(t, v)\, f(t, v)\right)$$

$$= \frac{f^{(1)}(t, v)}{2}$$

C'est la condition (10) pour $m = 1$. Le schéma (2) est donc consistant à l'ordre 2 et l'on a vu qu'il est stable (quest. 3). Ceci assure la convergence à l'ordre 2 du schéma d'Euler modifié.

6. a) Vérifions d'abord que le schéma d'Euler implicite est bien défini c'est-à-dire que u_{n+1} est déterminé d'une manière unique par (7) pour u_n donné.

Le schéma (7) s'écrit sous la forme d'une équation de point fixe :

(11) $u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$.

Vérifions que l'application de point fixe est contractante, au moins pour h assez petit. Soit

$$\varphi(v) = u + h\, f(t, v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

pour t, u donnés. Alors

$$|\varphi(v) - \varphi(w)| = h\,|f(t, v) - f(t, w)|$$

$$\leq hL\,|v - w|.$$

On se donne h^* tel que $0 < h^* < 1/L$:

$$|\varphi(v) - \varphi(w)| \leq h^* L\,|v - w| \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}$$

pour tout $h \leq h^*$, avec $h^* L < 1$. L'application φ est donc une contraction dans $\mathbb{R}$. D'où l'assertion. Il existe un unique point fixe u_{n+1} défini par (11) pour $h \leq h^*$; le schéma d'Euler implicite est bien défini

— Montrons maintenant que (7) peut se mettre sous la forme générale (3) des schémas à un pas. Pour cela, il faut que

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = F(t, u_n, h) = f\left(t_{n+1}, u_n + h\,\frac{u_{n+1} - u_n}{h}\right)$$

La fonction F est définie de manière implicite par la relation ci-dessus. Soit t, v, h donnés, la valeur $F(t,v,h)$ est définie comme suit

(12) $x = F(t,v,h) \iff x = f(t+h, v+hx)$.

La valeur x est point fixe de l'application

$$\phi(y) = f(t+h, v+hy) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Donc

$$|\phi(y) - \phi(z)| \leq Lh|y-z| \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Comme plus haut l'application ϕ est contractante pour $h \leq h^*$. Par conséquent, il existe un unique point fixe x. L'application F est bien définie pour le schéma d'Euler implicite

b) Par définition de F en (12), on a pour $h = 0$:

$$x = F(t,v,0) \iff x = f(t,v)$$

c.à.d. $F(t,v,0) = f(t,v)$. C'est la condition suffisante de consistance pour le schéma (F).

Vérifions que F est lipschitzienne par rapport au second argument. Soit $v, w \in \mathbb{R}$ et

$$x = F(t,v,h) \iff x = f(t+h, v+hx)$$

$$y = F(t,w,h) \iff y = f(t+h, w+hy)$$

Par différence

$$|x-y| \leq L\left(|v-w| + h|x-y|\right)$$

Soit encore $h^* < 1/L$, il vient

$$|x-y| \leq L|v-w| + Lh^*|x-y|$$

pour tout $h \leq h^*$, c.à.d.

$$|x-y| \leq \frac{L}{1-Lh^*}|v-w|$$

Soit

$$\left|F(t,v,h) - F(t,w,h)\right| \leq \frac{L}{1-Lh^*}|v-w|$$

quelque soient $v, w \in \mathbb{R}$ et pour $h \leq h^*$.

D'où l'assertion et la stabilité du schéma.

Finalement la consistance et la stabilité assurent la convergence à l'ordre 1 du schéma d'Euler implicite