Université Paul Sabatier | Année 2017–2018
L3 Enseignement, module Analyse 2 | Semestre 6

TD1 : Intégration sur un intervalle compact

1 Aire du disque, volume de la sphère, longueur du cercle

1.1 L'aire du disque

Soit $R > 0$. On considère

$$D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Calculer l'aire de D_R (à l'aide du calcul intégral).

1.2 Le volume de la sphère

Soit $R > 0$. On considère

$$B_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

a) Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer l'aire $S(z_0)$ de l'intersection de B_R avec le plan d'équation $z = z_0$.
b) À l'aide de la formule

$$V(B_R) = \int_{-R}^{R} S(z)\, dz,$$

calculer le volume $V(B_R)$ de B_R.

1.3 La longueur du cercle

Soit $R > 0$. On considère

$$C_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Calculer la longueur de C_R (à l'aide du calcul intégral) :

- montrer que
$$(x, y) \in C_R \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad ;$$
cela permet de paramétrer le cercle ;
- utiliser la formule donnant la longueur d'une courbe paramétrée γ : quand $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ pour $\theta \in [a, b]$,
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta.$$

2 Sur l'aire et la longueur d'une ellipse

Pour $a, b > 0$, on considère

$$E_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

et

$$D_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

2.1 L'aire contenue dans l'ellipse

Calculer l'aire de $D_{a,b}$ (à l'aide du calcul intégral).

2.2 La longueur de l'ellipse

Montrer que

$$(x, y) \in E_{a,b} \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad ;$$

cela permet de paraméter l'ellipse.

En déduire que la longueur de $E_{a,b}$ est donnée par :

$$L_{a,b} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

On notera

$$f(a, b, \theta) := \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}, \quad g(a, b, \theta) := a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

2.3 L'ellipse la plus courte ?

Soit $\mathcal{A} > 0$. On s'intéresse à toutes les ellipses pour lesquelles l'aire contenue est égale à $\mathcal{A}$. On se demande s'il en existe-t-il une qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle ?). Il sera utile d'introduire R tel que

$$\mathcal{A} = \pi R^2.$$

- Donner l'expression de la longueur $\ell(a)$ d'une telle ellipse.
- Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère la fonction

$$h_\theta :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad h_\theta(a) = f(a, \frac{R^2}{a}, \theta) = \sqrt{a^2\sin^2\theta + \frac{R^4}{a^2}\cos^2\theta}.$$

  Montrer que h_θ vérifie :

$$\forall a > 0, \quad h_\theta''(a) \geq 0.$$

  (Ainsi h_θ est convexe.)
- En déduire que

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall a > 0, \quad h_\theta(a) \geq h_\theta(R) + (a - R)h_\theta'(R).$$

- En déduire que

$$\ell(a) \geq \ell(R) + (a - R)\int_0^{2\pi} h_\theta'(R)\, d\theta.$$

- Calculer cette dernière intégrale.
- Quelle est la réponse à la question de départ : existe-t-il une ellipse qui a un périmètre plus petit que toutes les autres (et si oui, laquelle ?)
- Quel serait l'equivalent dans l'espace usuel de dimension 3 ?

3 La longueur d'une famille de morceaux de paraboles

Pour une courbe paramétrée $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$ de classe C^1, on rappelle que sa longueur est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Pour $s \geq 0$, on considère

$$f_s : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_s(x) := s(1-x^2).$$

a) Dessiner la courbe représentative $\mathcal{C}_s$ de f_s.
b) Donner la formule pour la longueur de $\mathcal{C}_s$, et la calculer.
c) Quelle est la courbe $\mathcal{C}_s$ la plus courte ?

4 Calcul de l'intégrale de la gaussienne grâce à un paramètre

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

a) Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $f'(x)$, $g'(x)$, et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2f'(x)f(x).$$

c) En déduire que la fonction $g + f^2$ est constante sur $\mathbb{R}$. Que vaut cette constante ?
d) Déterminer la limite quand $x \to ++\infty$ de $f(x)$ et de $g(x)$.

5 Calcul de dérivée avec paramètre dans les bornes et à l'intérieur

Soient $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On considère

$$F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt.$$

Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 et calculer $F'(x)$.

Application :

$$F(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(x^2+t^2)\,dt.$$

6 Un problème variationnel sur les films de savon

On cherche la forme d'un film de savon qui s'appuie sur deux cercles parallèles de rayon R séparés d'une distance $2d$. On choisit des coordonnées orthonormées (O, x, y, z) dans lesquelles les cercles sont d'axe Ox, et centrés en $(\pm d, 0, 0)$. On admet que la surface cherchée, si elle existe, a une symétrie de révolution. Elle est alors décrite par sa trace $\{(x, f(x))\}_{x\in[-d,d]}$ dans le plan (O, x, y). Le film a la propriété de minimiser sa surface

$$S_f = \int_{-d}^{d} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

1) Soit g une fonction C^1 sur $[-d, d]$ qui s'annule aux extrémités. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $S(\lambda) = S_{f+\lambda g}$. Justifier que S est dérivable en 0 puis que $S'(0) = 0$.

2) Calculer $S'(0)$. On pose $\phi = \frac{f\,f'}{\sqrt{1+f'^2}}$. Montrer que $S'(0) = \int_{-d}^{d} g(x)\big(\sqrt{1 + f'(x)^2} - \phi'(x)\big)\, dx$.

3) En déduire que

$$\forall x \in [-d, d], \sqrt{1 + f'(x)^2} - \phi'(x) = 0$$

et que cela donne une équation différentielle dont f est solution.

4) Vérifier que les fonctions de la forme $x \mapsto A\cosh(x/A)$ sont solutions de cette équation. On admet que si f existe, elle est nécessairement de cette forme.

Quelle condition doit satisfaire A pour qu'une telle fonction soit effectivement solution ?

Quelle est l'allure du graphe de $\phi : A \mapsto A\,\mathrm{ch}(d/A)$ (on pourra étudier le signe de ϕ'' pour obtenir celui de ϕ) ? Existe-t-il toujours des films de savons qui s'appuient sur les deux cercles ?