Université Paul Sabatier — Année 2017–2018
L3 Enseignement, module Analyse 2 — Semestre 6

TD2 : Fonctions définies par des intégrales généralisées

1 Convergence, divergence

1.1 Nature et valeur

a) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et leur valeur en cas de convergence

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt.$$

b) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{4t^2+t+1}}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt.$$

c) Toboggan : on a trouvé

$$T(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} \frac{\sqrt{1+\psi'(y)^2}}{\sqrt{y_0-y}}\,dy$$

pour un toboggan $y=\phi(x)$, et avec $\psi=\phi^{-1}$. Convergence et calcul pour une planche $y=\lambda x$? Quelle signification physique ? et pour $\phi(x)=x^2$?

1.2 Un exemple classique de calcul sans primitive

a) Montrer que

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt$$

converge. déterminer la valeur de I en étudiant

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+, X\to+\infty} \int_\varepsilon^X \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,dt.$$

2 Sur les hyp. des théorèmes : attention à la domination

On considère

$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt.$$

a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto \frac{x}{1+x^2t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. Cela permet de dire que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) On tente d'appliquer le théorème de domination : soit φ telle que

$$\forall x \geq 0, \forall t \geq 0, \quad \frac{x}{1+x^2t^2} \leq \varphi(t).$$

Cela implique que
$$\sup_{x\geq 0} \frac{x}{1+x^2t^2} \leq \varphi(t).$$
Calculer ce sup, et en déduire que φ ne peut pas être intégrable.

Cela dit que l'hypothèse de domination n'est pas satisfaite, et donc que le théorème de continuité ne peut pas être appliqué, mais cela ne dit rien sur la continuité potentielle de la fonction g.

c) Calculer $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

La morale est que le théorème de continuité donne une condition *suffisante* pour la continuité :

$$\text{l'hypothèse de domination} \quad \Longrightarrow \quad \text{la continuité de la fonction définie par l'intégrale,}$$

et cet exemple montre que

sans l'hypothèse de domination, ATTENTION.

3 Calcul d'intégrales grâce à un paramètre

3.1 Un premier exemple

Soit
$$I_n := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$
a) Montrer la convergence de chanque I_n pour $n \geq 1$.

b) Pour $x > 0$, on considère
$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+t^2}\, dt.$$
À l'aide du théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre, montrer que g est de classe C^1 sur $[\frac{1}{2}, 2]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $g'(1)$ à l'aide du théorème de dérivation.

c) Montrer par récurrence que g est de classe C^∞ sur $[\frac{1}{2}, 2]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et en déduire une relation entre I_n et les dérivées de g en 1.

d) Calculer directement g à partir de sa définition, et en déduire l'expression de ses dérivées.

e) Déterminer la valeur de I_n pour $n \geq 1$.

3.2 Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

a) Montrer que $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe (à l'aide d'une intégration par partie).

b) Montrer que $I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge mais ne converge pas absolument.

c) Soit
$$g(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt.$$
Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $g'(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis $g(x)$.

d) Montrer que $g(x) \to I$ quand $x \to 0^+$.

e) En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

4 Étude de la fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

4.1 L'ensemble de définition de la fonction Gamma

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

b) Montrer que $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

c) En déduire que l'intégrale généralisée qui définit $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$. L'ensemble de définition de Γ est donc $\mathbb{R}_+^*$.

4.2 Une des composantes de la fonction Gamma

On considère

$$\Gamma_{1,\infty} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Gamma_{1,\infty}(x) := \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

d) Soient $a < b$. Montrer, à l'aide du théorème de continuité, que $\Gamma_{1,\infty}$ est continue sur $[a, b]$. En déduire que $\Gamma_{1,\infty}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

e) En raisonnant de manière analogue, montrer que $\Gamma_{1,\infty}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de $\Gamma'_{1,\infty}$, puis que $\Gamma_{1,\infty}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\Gamma''_{1,\infty}$.

4.3 L'autre composante de la fonction Gamma

On considère

$$\Gamma_{0,1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad \Gamma_{0,1}(x) := \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

f) Soient $0 < a < b$. Montrer, à l'aide du théorème de continuité, que $\Gamma_{0,1}$ est continue sur $[a, b]$. En déduire que $\Gamma_{0,1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

g) En raisonnant de manière analogue, montrer que $\Gamma_{0,1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner l'expression de $\Gamma'_{0,1}$, puis que $\Gamma_{0,1}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de $\Gamma''_{0,1}$.

4.4 La fonction Gamma est convexe

h) Déduire de ce qui précède que Γ est de classe C^2sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\Gamma'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que Γ' s'annule au plus une fois sur $]0, +\infty[$.

i) Calculer $\Gamma(1)$.

j) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ (à l'aide d'une intégration par partie). En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout n entier naturel, $n \geq 1$. En particulier, que vaut $\Gamma(2)$? En déduire que Γ' s'annule exactement une fois sur $]0, +\infty[$, en un point $x_0 \in]1, 2[$.

k) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x)$, $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x)$, $\lim_{x\to +\infty} \Gamma(x)$ et donner l'allure du graphe de Γ sur $]0, +\infty[$.

l) On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ (à l'aide du changement de variable $s = \sqrt{t}$).

5 La fonction Beta d'Euler

On considère

$$B(p,q) := \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1}\,dx.$$

a) Montrer que $x \mapsto (1-x)^{p-1}x^{q-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si (et seulement si) p et q sont strictement positifs.

b) Montrer que B est symétrique : $B(p,q) = B(q,p)$ si $p,q > 0$.

Remarque : on pourra bientôt montrer que

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

avec la méthode : en partant de l'écriture de $\Gamma(p)\Gamma(q)$, avec x comme variable pour $\Gamma(p)$, y comme variable pour $\Gamma(q)$, et en faisant le changement de variable $(x,y) \mapsto (s,t)$ avec

$$\begin{cases} x = st, \\ y = s(1-t) \end{cases} .$$

6 Introduction à la transformée de Laplace

Étant donné une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$, on considère sa transformée de Laplace :

$$Lf(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt.$$

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère $f_a(t) = e^{at}$. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $t \mapsto f_a(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Ensuite, déterminer $Lf_a(z)$ pour de tels z.

b) Même question avec $a \in \mathbb{C}$.

c) On suppose à présent que la fonction f est bornée sur $]0,+\infty[$. Montrer que le domaine de définition de Lf contient le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\ z > 0\}$.

d) On suppose à présent que le fonction f vérifie : il existe $a, M \in \mathbb{R}$ telle que $|f(t)| \leq Me^{at}$ sur $]0,+\infty[$. Montrer que le domaine de définition de Lf contient le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\ z > a\}$.

e) Soit f de classe C^1 telle qu'il existe $a, M \in \mathbb{R}$ telle que $|f(t)| + |f'(t)| \leq Me^{at}$ sur $]0,+\infty[$. Que peut-on dire pour l'ensemble de définition de Lf et de Lf' ? À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre Lf' et Lf valable sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\ z > a\}$.

La transformée de Laplace est utile en particulier pour résoudre des équations intégrales, des équations différentielles, et aussi en arithmétique (théorème des nombres premiers).

7 Introduction à la transformée de Fourier

Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on considère sa transformée de Fourier :

$$F(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt.$$

a) On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire que $F(f)$ est bien définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Soient

$$f_1(t) = e^{-|t|}, \quad f_2(t) = f_1(t)\sin t.$$

Calculer $F(f_1)$,$F(f_2)$.

c) On suppose que f est dans l'espace de Schwartz :

$$\mathcal{S} := \{\{,\ f \text{ de classe } C^\infty \text{ et } \forall p,q \in \mathbb{N}, x^p f^{(q)}(x) \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty\}.$$

En déduire que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $F(f^{(q)})$ est définie sur $\mathbb{R}$, et exprimer $F(f^{(q)})$ en fonction de $F(f)$.

Application : la transformée de Fourier est utile en particulier pour résoudre des équations aux dérivées partielles.