Université Paul Sabatier
L3 Enseignement, module Analyse 2

Année 2017–2018
Semestre 6

TD4 : Équations différentielles non linéaires

1 Équations scalaires d'ordre 1

1.1 Étude qualitative

1.1.1 Dans le cas globalement lipschizien

On considère
$$u'(t) = \sin u(t), \quad u(0) = x_0.$$

- Montrer que la fonction sin est globalement lipschizienne sur $\mathbb{R}$, de sorte que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
- Déterminer les points d'équilibre du problème.
- Déterminer la solution de chaque problème de Cauchy
$$\begin{cases} u'(t) = \sin u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v'(t) = \sin v(t) \\ v(0) = \pi \end{cases}.$$
- Soit $x_0 \in]0, \pi[$. Déterminer le comportement (monotonie ? limites ?) de la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} w'(t) = \sin w(t) \\ w(0) = x_0. \end{cases}$$

1.1.2 Dans le cas localement lipschizien

On considère
$$u'(t) = -u(t)^3, \quad u(0) = x_0.$$

- Montrer que la fonction $x \mapsto -x^3$ est localement lipschitzienne mais pas globalement lipschizienne sur $\mathbb{R}$, de sorte que seul le théorème de Cauchy-Lipschitz version gnrale s'applique.
- Déterminer les points d'équilibre du problème.
- Soit $x_0 > 0$. Montrer que u est positive et dcroissante sur $[0, T^*(x_0)[$, et en déduire que $T^*(x_0) = +\infty$, et la limite en $+\infty$ de la solution. Calculer explicitement la solution pour retrouver ce comportement.
- Soit $x_0 < 0$. Montrer que u est négative et croissante sur $[0, T^*(x_0)[$, et en déduire que $T^*(x_0) = +\infty$, et la limite en $+\infty$ de la solution. Calculer explicitement la solution pour retrouver ce comportement.

1.2 Des exemples d'explosion en temps fini

1.2.1 Pour un problème autonome

On considère

$$u'(t) = u(t)^3, \quad u(0) = x_0.$$

– Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale) s'applique. Ainsi u existe sur $[0, T_u^*(x_0)[$.
– Résoudre dans le cas particulier $x_0 = 0$.
– Réssoudre quand $x_0 > 0$. Que vaut le temps d'existence $T_u^*(x_0)$?
– Réssoudre quand $x_0 < 0$. Que vaut le temps d'existence $T_u^*(x_0)$?

1.2.2 Pour un problème non autonome

On considère

$$v'(t) = v(t)^3 + t + 1, \quad v(0) = x_0.$$

– Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale) s'applique. Ainsi v existe sur $[0, T_v^*(x_0)[$.
– On suppose que $x_0 > 0$. Montrer que

$$\forall t \in]0, \min(T_u^*(x_0), T_v^*(x_0)[, \quad v(t > u(t).$$

– En déduire que $T_v^*(x_0) \leq T_u^*(x_0)$.

1.3 Unicité et caractère Lipschitz

On considère

$$(C): \quad u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad u(0) = 0.$$

1.3.1 La fonction $\sqrt{}$ n'est pas localement lipschitzienne en 0

Vérifier qu'il n'est pas C telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad |\sqrt{x} - 0 \leq C|x - 0|.$$

1.3.2 Une famille de solutions

Soit $a \geq 0$. On considère

$$u_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{pour } x \geq a \\ 0 \quad \text{pour } x \leq a \end{cases}.$$

Vérifier que pour tout $a \geq 0$, la fonction u_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est solution du problème de Cauchy (C). Cela donne une infinité de solutions au problème de Cauchy (C).

1.3.3 D'autres solutions ?

Soit $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (C) sur $[0, +\infty[$. On suppose que u n'est pas la fonction nulle. Montrer qu'il existe $a \geq 0$ tel que $u = u_a$ sur $[0, +\infty[$.

2 Le système proie-prédateur

Soient $a, b, c, d > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

$x(t)$ représente la quantité de proies (lapins, sardines) à l'instant t, $y(t)$ la quantité de prédateurs (renards, requins).

2.1 Existence globale des solutions

a) Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz (version générale) s'applique, et donc qu'il existe une unique solution maximale.

b) Résoudre le problème de Cauchy pour $x_0 \geq 0, y_0 = 0$.

c) Résoudre le problème de Cauchy pour $x_0 = 0, y_0 \geq 0$.

d) En déduire que si $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ alors, *tant que la solution existe*, on a encore $x(t) > 0$, $y(t) > 0$.

e) On considère

$$H : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y.$$

Toujours dans le cas $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, montrer que la quantité $H(x(t), y(t))$ est constante au cours du temps (*tant que la solution existe*). En déduire que la solution $(x(t), y(t))$ existe sur $[0, +\infty)$.

2.2 Étude qualitative du comportement

On suppose toujours $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

f) Déterminer le signe de $x'(t)$, $y'(t)$ selon la zone du plan dans laquelle se trouve $(x(t), y(t))$. (Il y a 4 zones à distinguer.)

g) On suppose par exemple que

$$x_0 \in]0, \frac{c}{d}[, \quad y_0 \in]0, \frac{a}{b}[.$$

Montrer qu'il existe un premier instant t_1 tel que

$$x(t_1) = \frac{c}{d}, \quad y(t_1) \in]0, y_0[.$$

h) À l'aide d'un développement de Taylor, montrer que pour $t > t_1$ mais proche de t_1, on aura

$$x(t) > \frac{c}{d}, \quad y(t) \in]0, y_0[.$$

i) Montrer alors qu'il existe un premier instant $t_2 > t_1$ tel que

$$x(t_2) > \frac{c}{d}, \quad y(t_2) = \frac{a}{b},$$

puis que pour $t > t_2$ mais proche de t_2 on aura

$$x(t) > \frac{c}{d}, \quad y(t) > \frac{a}{b}.$$

j) Montrer de la même manière qu'il existe un premier instant $t_3 > t_2$ tel que

$$x(t_3) = \frac{c}{d}, \quad y(t_3) > \frac{a}{b},$$

puis qu'il existe un premier instant $t_4 > t_3$ tel que

$$x(t_4) < \frac{c}{d}, \quad y(t_4) = \frac{a}{b},$$

et enfin qu'il existe un premier instant $t_5 > t_4$ tel que

$$x(t_5) = \frac{c}{d}, \quad y(t_5) < \frac{a}{b}.$$

k) En utilisant le fait que

$$y \in]0, \frac{a}{b}[\mapsto H(\frac{c}{d}, y)$$

est injective, montrer que $y(t_5) = y(t_1)$, et en déduire que la solution est périodique (de période $t_5 - t_1$).

2.3 Une observation sur les moyennes

l) Calculer les valeurs moyennes de x et de y sur une période.
m) En période de pêche :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - \varepsilon x, \\ y' = -cy + dxy - \varepsilon' y, \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

Que deviennent les valeurs moyennes de x et y ? Quelle espèce est favorisée par la pêche ? (Rq : ceci a été observé expérimentalement.)

3 L'étude du mouvement du pendule

On veut étudier le mouvement du pendule :

La variation de l'angle avec la verticale est donnée par l'équation différentielle d'ordre 2 non linéaire

$$\theta'' = -\sin\theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1, \tag{1}$$

où θ_0 est l'angle avec la verticale au temps 0, et θ_1 est la vitesse angulaire au temps 0.

3.1 Existence globale et unicité

a) Mettre ce problème sous forme vectorielle :

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

avec

$$u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ à préciser .}$$

b) On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme

$$\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = |x| + |y|.$$

Montrer qu'il existe c tel que

$$\|f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| \leq c\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|.$$

Cela montre que f est globalement lipschitzienne.

c) En déduire que le problème de Cauchy (2) admet une et une seule solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

d) En déduire que le problème initial (1) admet une et une seule solution :$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

e) Déterminer les points d'équilibre de (2), et ce qu'ils signifient pour (1). Est-ce physiquement raisonnable ?

f) On considère

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^{\in} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\infty}{\in}\dagger^{\in} - \cos\S.$$

Montrer que $t \mapsto \mathcal{E}(\sqcap(\sqcup))$ est constante.

En fait, $\mathcal{E}\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$ est l'énergie de la solution : la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\theta'(t)^2$ et de l'énergie potentielle $-\cos\theta(t)$. Cela va permettre d'étudier le comportement de toutes les solutions. On va se concentrer sur trois cas "particuliers" :

$$(\theta_0, \theta_1) = (0, 4), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2}), \quad (\theta_0, \theta_1) = (0, 2).$$

3.2 Premier cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, 4)$

a) Tracer la courbe $y = \sqrt{2(7 + \cos x)}$.

b) Tracer

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vdash\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. En particulier, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = 2\pi, \quad \theta'(T) = 4.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi, \quad \theta'(t + T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?

3.3 Deuxième cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, \sqrt{2})$

a) Tracer la courbe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sqrt{2\cos x}$.

b) Tracer

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = /\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. En particulier, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que

$$\theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\theta(t + T) = \theta(t), \quad \theta'(t + T) = \theta'(t).$$

Quelle est la signification physique de cette relation ?

d) Pouvez-vous imaginer (et prouver) d'autres propriétés particulières de la solution ? (propriétés de symétrie par exemple)

3.4 Troisième cas particulier : $(\theta_0, \theta_1) = (0, 2)$

a) Tracer la courbe $x \in [-\pi, \pi] \mapsto \sqrt{2(1 + \cos x)}$.
b) Tracer

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{E}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \infty\}.$$

c) Déterminer le comportement de la solution de (2) associée à la donnée initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quelle est la signification physique ?