Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2017–2018
Arithmétique

Partiel du mardi 13 mars 2018, 10 h - 11 h 30

Exercice 1. On définit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}$ par :

$$f(n):=\frac{1}{n}\sum_{\substack{0<a\le n\\ a\wedge n=1}}a.$$

1) (1 pt) Montrer que f n'est pas multiplicative.
2) (3 pts) Montrer que $\sum_{d|n}f(n/d)=\frac{n+1}{2}$.
3) (2 pts) En déduire que $\forall n>1\quad f(n)=\frac{1}{2}\varphi(n)$ (rappel : $\varphi*\mathbf{1}=\mathrm{id}$).

Exercice 2. Soient $a\in\mathbb{N}^*$, θ la racine positive de l'équation $x^2-ax-1=0$ et θ' l'autre racine.

1) (3 pts) Montrer que θ est irrationnel.
2) (3 pts) Montrer que les dénominateurs des réduites h_n/k_n du développement en fraction continue $\theta=[a_0,a_1,\dots]$ sont donnés par
$$k_{n-1}=\frac{\theta^n-\theta'^n}{\theta-\theta'}.$$
(Rappel : $k_{-1}=0$, $k_0=1$, $k_n=a_nk_{n-1}+k_{n-2}$.)
3) (1 pt) Pour $a=1$, reconnaître le réel θ et la suite (k_n).

Exercice 3. Dans cet exercice, le produit infini formel $\prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1-aq^k\right)$ (usuellement noté $(a;q)_\infty$) sera noté simplement $(a;q)$. On pose

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}A(n)X^n:=\frac{1}{(X;X^6)\,(X^5;X^6)}\quad\text{et}\quad\sum_{n\in\mathbb{N}}B(n)X^n:=\left(-X;X^3\right)\left(-X^2;X^3\right).$$

1) (3 pts) Quelle est l'interprétation combinatoire de $B(n)$ et $A(n)$ en termes de nombres de partitions ?
2) (2 pts) Montrer que
$$(-a;q)=\frac{\left(a^2;q^2\right)}{(a;q^2)\,(aq;q^2)}.$$
3) (2 pts) En déduire que $B(n)=A(n)$ ($\forall n\in\mathbb{N}$).

Solutions sur `https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_à_la_théorie_des_nombres/` : exercices 1-13, 2-10 et 3-9