Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2017–2018
Arithmétique

# TD 2 : Approximation diophantienne et fractions continues.

**Exercice 1.** Soit $x$ un irrationnel. On pose

$$C := \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid |x - p/q| < 1/q^2\} \quad \text{et} \quad F := \{p/q \mid (p,q) \in C\}.$$

1) Déduire du théorème d'approximation de Dirichlet que $F$ est infini.
2) En déduire que la mesure d'irrationalité de $x$ est supérieure ou égale à 2.

**Exercice 2.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $X$ sa mesure d'irrationalité, c'est-à-dire la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des réels $d$ tels que $0 < |x - p/q| < 1/q^d$ pour une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

1) Pourquoi a-t-on toujours $X \geq 1$ ?
2) Soit $Y$ la borne inférieure de l'ensemble des réels $d$ pour lesquels il existe $A > 0$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^d}$ pour tout rationnel $\frac{p}{q} \neq x$. Démontrer que $Y = X$. (Indication : montrer que $\forall d > X \quad d \geq Y$ et que $\forall d > Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad d + \varepsilon \geq X$.)
3) Démontrer que la mesure d'irrationalité de tout rationnel est égale à 1.

**Exercice 3.**

1) Montrer qu'un réel $x$ est de Liouville (c'est-à-dire de mesure d'irrationalité infinie) si et seulement si pour tout entier $n > 0$, il existe des entiers $q_n > 1$ et $p_n$ tels que $0 < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$.
2) En déduire que pour tout entier $b > 1$ et toute suite $(a_k)_{k>0}$ d'entiers compris entre 0 et $b-1$, le nombre
$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^{k!}}$$
est de Liouville, à condition bien sûr qu'une infinité de $a_n$ soient non nuls. Indication : poser $q_n = b^{n!}$ et $p_n = q_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b^{k!}}$.
3) En déduire que l'ensemble des nombres de Liouville a la puissance du continu.

**Exercice 4.** Démontrer la proposition suivante du cours : si

$$\begin{aligned} h_{-2} &= 0, \quad h_{-1} = 1, \qquad h_p = a_p h_{p-1} + h_{p-2} \\ k_{-2} &= 1, \quad k_{-1} = 0, \qquad k_p = a_p k_{p-1} + k_{p-2} \end{aligned}$$

alors $(\forall p \in \mathbb{N})$ :

$$[a_0, a_1, \ldots, a_p] = \frac{h_p}{k_p} \qquad (1)$$
$$a_p = -\frac{h_p k_{p-2} - h_{p-2} k_p}{h_p k_{p-1} - h_{p-1} k_p} \qquad (2)$$
$$h_{p-1} k_p - h_p k_{p-1} = (-1)^p. \qquad (3)$$

**Exercice 5.**

1) Soient $a_0 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \in ]1, +\infty[$ et $x_0 := [a_0, x_1]$. Vérifier que $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$.
2) En déduire la fin de la preuve du théorème de bijection entre irrationnels et fractions continues infinies, c'est-à-dire : soient $(a_n)$ une fraction continue simple infinie, $\ell$ la limite (irrationnelle) de la suite de ses réduites et $(b_n)$ la fraction continue de $\ell$ ; montrer (par récurrence bien fondée) que $(b_n) = (a_n)$.
3) (facultatif) En déduire également qu'un rationnel n'a qu'un développement (en fraction continue simple finie) de la forme $[a_0, \ldots, a_N]$ avec $a_N > 1$ (donc n'a que deux développements, le second étant $[a_0, \ldots, a_N - 1, 1]$).

**Exercice 6.** (extrait du partiel de novembre 2016)
Soient $x$ un irrationnel, $(h_n/k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses réduites et $h/k$ un rationnel ($h \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^*$).

1) (2 pts) On rappelle que pour tout $n$ tel que $k_{n+1} > k$, on a $|kx - h| \geq |k_n x - h_n|$. Montrer que pour un tel $n$,
$$\left|\frac{h}{k} - \frac{h_n}{k_n}\right| \leq \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k_n}\right) |kx - h| .$$

2) (1 pt) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n \leq k < k_{n+1}$ et déduire de la question précédente que pour un tel $n$,
$$|hk_n - h_n k| \leq 2k\,|kx - h|\,.$$
3) (1 pt) En déduire que si $\left|x - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2}$ alors $\frac{h}{k}$ est égal à l'une des réduites de $x$.
4) (3 pts) Application : soient $d$ un entier positif non carré et $a, b$ deux entiers strictement positifs tels que
$$a^2 - db^2 = \pm 1.$$
Montrer que
$$\frac{a}{b} + \sqrt{d} \geq 1 + \sqrt{d} > 2$$
et en déduire que $\frac{a}{b}$ est l'une des réduites de $\sqrt{d}$.

**Exercice 7.** (facultatif : extrait de l'examen de deuxième session de juin 2017)

On note $\sim$ la relation d'équivalence sur les irrationnels “avoir un quotient complet commun”. Autrement dit, si deux irrationnels $x = [a_0, a_1, \ldots]$ et $y = [b_0, b_1, \ldots]$ ont pour suites de quotients complets $(x_n)$ et $(y_n)$ :
$$x \sim y \iff \exists r, s \in \mathbb{N} \quad x_r = y_s.$$

1) Justifier brièvement les deux propriétés suivantes :
   (a) avec les mêmes notations :
$$x_r = y_s \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad a_{r+k} = b_{s+k} \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{r+k} = y_{s+k}\ ;$$
   (b) pour tout irrationnel $x$ :
$$\boxed{\text{Lemme 1 : } \forall a \in \mathbb{Z} \quad a + x \sim x.}$$
2) On considère d'autre part l'action, sur l'ensemble des irrationnels, du groupe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ (les matrices $2 \times 2$ à coefficients entiers et de déterminant $\pm 1$), donnée, pour tout irrationnel $x$, par :
$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \qquad M \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$
Démontrer que (pour tous irrationnels $x$ et $y$) :
$$\text{si} \quad x \sim y \quad \text{alors} \quad \exists M \in G \quad y = M \cdot x.$$
*La suite de l'exercice va consister à démontrer la réciproque, à l'aide du lemme 1 ci-dessus et des lemmes 2 et 3 suivants, élémentaires mais admis faute de temps :* pour tout irrationnel $x$,
$$\boxed{\text{Lemme 2 : } -x \sim x.}\ \boxed{\text{Lemme 3 : } \tfrac{1}{x} \sim x.}$$
3) Soient $x, y$ deux irrationnels dans la même orbite pour l'action de $G$. Il existe donc $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que
$$ad - bc = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$
Montrer qu'on peut même choisir $a, b, c, d$ tels que de plus, $(c, d) = (0, 1)$ ou $c > 0$.
4) Montrer que si $(c, d) = (0, 1)$ alors $y \sim x$ (utiliser les lemmes 1 et 2).
5) On étudie maintenant le second cas : $c > 0$. On choisit alors, parmi les deux développements du rationnel $\frac{a}{c}$ en fraction continue finie, celui dont la longueur $n$ est de parité telle que
$$ad - bc = (-1)^n.$$
On le note
$$\frac{a}{c} = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$$
et l'on note $h_i, k_i$ (pour $i < n$) les numérateurs et dénominateurs des réduites associées.
Démontrer successivement :
   (a) $a = h_{n-1}$ et $c = k_{n-1}$ ;
   (b) $\exists r \in \mathbb{Z} \quad b = rh_{n-1} + h_{n-2} \quad$ et $\quad d = rk_{n-1} + k_{n-2}$ ;
   (c) $\frac{ax+b}{cx+d} = [a_0, \ldots, a_{n-1}, x + r]$ ;
   (d) et enfin (en utilisant les lemmes 1 et 3) : $y \sim x$.