Université Paul Sabatier
Licence L3 ESR 2017–2018
Arithmétique

TD 3 : Partitions et séries formelles

Exercice 1. Quelle est la série génératrice du nombre de partitions de n en parties qui sont :

- paires et inférieures ou égales à k ?
- paires (resp. impaires) ?
- des carrés parfaits ?
- des nombres premiers ?
- distinctes ?
- des carrés parfaits distincts ?
- des nombres premiers distincts ?

Exercice 2. (facultatif) Démontrer, à l'aide des séries génératrices, que :

1) le nombre de partitions de n en parties distinctes est égal au nombre de ses partitions en parties impaires ;
2) le nombre de partitions de n dans lesquelles les parties paires sont en nombre pair moins celui où elles sont en nombre impair est égal à celui en parties distinctes impaires.

Exercice 3. (facultatif) En raisonnant sur des diagrammes de Ferrers, démontrer que :

1) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il y a $p(n) - p(n-1)$ partitions de n dans lesquelles chaque partie est supérieure ou égale à 2, et autant dans lesquelles les deux plus grandes parties sont égales ;
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(1) + p(2) + \cdots + p(n) < p(2n)$. Indication : pour chaque k de 1 à n, transformer un diagramme d'une partition de k en un diagramme d'une partition de $2n$ en lui ajoutant une ligne.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des diagrammes de Ferrers des partitions de n en parties distinctes. On note $p_P(n)$ (resp. $p_I(n)$) le nombre de celles en un nombre pair (resp. impair) de parties. On considère deux transformations A et B, définies partiellement de E dans E de la façon suivante. Pour $e \in E$, soient b le nombre de points de la “base” (l'horizontale inférieure) et o le nombre de points de l'“oblique” (à 45 degrés en haut à droite). On construit $A(e)$ en déplaçant la base en une oblique supplémentaire (le long des o points). On construit $B(e)$ en déplaçant l'oblique en une base supplémentaire (sous les b points). Dans les deux cas, la transformation n'est autorisée que si le nouveau diagramme est encore un élément de E.

1) Montrer que si n est tel que pour chaque $e \in E$, une et une seule des deux opérations est autorisée, alors $p_P(n) = p_I(n)$.
2) Montrer que A est autorisée si $b < o$, qu'elle ne l'est pas si $b > o$, et qu'elle l'est si $b = o$ sauf, pour certains entiers n (à préciser), pour un élément particulier de E (à dessiner).
3) Montrer que B est autorisée si $b > o + 1$, qu'elle ne l'est pas si $b < o + 1$, et qu'elle l'est si $b = o + 1$ sauf exception à préciser de même.
4) En déduire le théorème des nombres pentagonaux : $p_P(n) - p_I(n) = 0$ sauf si $n = k(3k \pm 1)/2$, auquel cas cette différence vaut $(-1)^k$.

Exercice 5. À l'aide de la formule du triple produit de Jacobi, redémontrer le théorème des nombres pentagonaux : $\prod_{k\in\mathbb{N}^*} (1 - X^k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n X^{n(3n-1)/2}$.

Exercice 6. (extrait du partiel de novembre 2016, 3 pts sur 20) Déduire de la première identité d'Euler les deux identités suivantes :

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 + X^{2n+1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{X^{k^2}}{(1 - X^2)(1 - X^4)\dots(1 - X^{2k})} ;$$

$$\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1 + X^{2n}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{X^{k(k+1)}}{(1 - X^2)(1 - X^4)\dots(1 - X^{2k})}.$$

Exercice 7. (facultatif, extrait de l'examen de janvier 2017, 18 pts sur 30)

1) (1+2+1,5+2=6,5 pts) On définit les fonctions arithmétiques χ et δ par :

$$\chi(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{puis} \quad \delta(n) := \sum_{d|n} \chi(d).$$

(a) Démontrer que $\delta(n) = d_1(n) - d_3(n)$, où $d_1(n)$ (resp. $d_3(n)$) est le nombre de diviseurs de n congrus à 1 (resp. à 3) modulo 4.

(b) Montrer que χ est complètement multiplicative et en déduire que δ est multiplicative.

(c) Pour p premier et $k \in \mathbb{N}$, calculer $\delta\left(p^k\right)$ dans chacun des trois cas suivants : $p = 2$, $p \equiv 1 \mod 4$, $p \equiv 3 \mod 4$.

(d) Vérifier que

$$\sum_{d\geq 1} \chi(d) \frac{X^d}{1 - X^d} = \sum_{n\geq 1} \delta(n) X^n.$$

2) (0,5+1=1,5 pts) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r(n)$ le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n = a^2 + b^2$ (par exemple : $r(0) = 1$ et $r(5) = 8$).

(a) Expliquer pourquoi

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} X^{j^2}\right)^2 = \sum_{n\geq 0} r(n) X^n.$$

(b) L'objet de la suite du problème est de démontrer le théorème des deux carrés de Jacobi (1829) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r(n) = 4\left(d_1(n) - d_3(n)\right).$$

Déduire de ce qui précède que ce théorème équivaut à :

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} X^{j^2}\right)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4X^{4k+1}}{1 - X^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4X^{4k+3}}{1 - X^{4k+3}}.$$

3) (2+1,5=3,5 pts) On rappelle la notation de Pochhammer $(u; v)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - uv^k\right)$.
Démontrer les identités suivantes :

(a)

$$\left(q^4; q^4\right)_\infty \left(-q^3; q^4\right)_\infty \left(-q; q^4\right)_\infty = (-q; q)_\infty^2 (q; q)_\infty \;;$$

(b)

$$\frac{(q; q)_\infty}{(-q; q)_\infty} = \left(q; q^2\right)_\infty^2 \left(q^2; q^2\right)_\infty.$$

4) (1+1+2+2+0,5=6,5 pts) On définit la série formelle :

$$\theta(y, z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} z^j y^{j^2}.$$

(a) Démontrer que

$$x\,\theta\left(\sqrt{q}, -x^2\sqrt{q}\right) = x\,\theta\left(q^2, x^4 q\right) - x^{-1}\,\theta\left(q^2, x^4/q\right).$$

(b) On rappelle la formule du triple produit de Jacobi :

$$\theta(y, z) = \left(y^2; y^2\right)_\infty \left(-zy; y^2\right)_\infty \left(-z^{-1}y; y^2\right)_\infty.$$

En déduire (à l'aide de la question précédente et en remarquant que $x\left(x^{-2}; q\right)_\infty = \left(x - x^{-1}\right)\left(x^{-2}q; q\right)_\infty$) :

$$\left(x - x^{-1}\right)(q; q)_\infty \left(x^2 q; q\right)_\infty \left(x^{-2}q; q\right)_\infty =$$
$$x\left(q^4; q^4\right)_\infty \left(-x^4 q^3; q^4\right)_\infty \left(-x^{-4}q; q^4\right)_\infty - x^{-1}\left(q^4; q^4\right)_\infty \left(-x^4 q; q^4\right)_\infty \left(-x^{-4}q^3; q^4\right)_\infty.$$

(c) En évaluant en $x = 1$ la dérivée formelle par rapport à x des deux membres de l'égalité ci-dessus (pour le second, on utilisera sans justification la formule $\left(\prod_k (1 + u_k)\right)' = \prod_k (1 + u_k) \sum_j \frac{u_j'}{1+u_j}$), en déduire :

$$(q; q)_\infty^3 = \left(q^4; q^4\right)_\infty \left(-q^3; q^4\right)_\infty \left(-q; q^4\right)_\infty \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4q^{3+4k}}{1 + q^{3+4k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4q^{1+4k}}{1 + q^{1+4k}}\right).$$

(d) À l'aide de la question 3 et de la formule du triple produit de Jacobi, en déduire :

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-q)^{j^2}\right)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4q^{3+4k}}{1 + q^{3+4k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4q^{1+4k}}{1 + q^{1+4k}}.$$

(e) Conclure (cf. question 2.b).