Université Paul Sabatier, FSI | 2017-2018
LICENCE TROISIÈME ANNÉE ESR | Calcul différentiel

Feuille 1

Exercice 1. Soit $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'une autre norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{R}^n$ est une application continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

b) En déduire que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, c'est-à-dire, $\exists C \geq 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{1}{C}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$$

c) Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes arbitraires sur $\mathbb{R}^n$. Prouver qu'elles sont équivalentes.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer que T est continue.

Exercice 3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une application. Montrer que $f = (f_1, ..., f_m)$ est continue en point $a \in A$ si et seulement si chaque f_i est continue en a.

Exercice 4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Montrer que f admet pour limite l en $(a, b) \in \Omega$ si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon_\theta(\rho)$, vérifiant $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\varepsilon_\theta(\rho)| \to 0$ lorsque $\rho \to 0$, telle que:

$$f(a + \rho\cos(\theta), b + \rho\sin(\theta)) = l + \varepsilon_\theta(\rho)$$

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni des normes L^p $\|\cdot\|_p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. On note $f_n \in E$ la fonction $x \mapsto x^n$, $n \geq 0$. Calculer $\|f_n\|_p$ pour tout p and pour tout n et en déduire que les normes $\|\cdot\|_p$ sont 2 à 2 non équivalentes.

Exercice 6. Soit E un espace normé.
1) Montrer que si E est complet, alors toute série absolument convergente converge;
2) Montrer que si toute série absolument convergente converge, alors E est complet.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ admettant un élément unité e.

Exercice 7. On munit $L(\mathcal{A})$ de la norme subordonné. $\forall a \in \mathcal{A}$, on note $L_a, R_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ les applications $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$. Montrer qu'elles appartiennent à $L(\mathcal{A})$ et calculer leurs normes.

Exercice 8. 1) Montrer qu'en posant

$$e^x := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}x^k$$

on définit une application exponentielle continue $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$.
2) Montrer que si $xy = yx$ alors $e^{x+y} = e^x e^y$ et en déduire que l'application exponentielle est à valeurs dans A^* groupe des inversibles de $\mathcal{A}$.

Exercice 9. 1) Pour $x, h \in \mathcal{A}$ et $k \geq 0$, on note

$$\Lambda_x^{(k)}(h) := \sum_{i+j=k} x^i h x^j \in \mathcal{A}$$

Montrer que chaque $\Lambda_x^{(k)}$ est une application linéaire continue et majorer sa norme. En déduire l'existence d'une application linéaire continue $\Lambda_x := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \Lambda_x^{(k-1)}$ et majorer sa norme.
2) Justifier la majoration

$$\|(x+h)^k - x^k - \Lambda_x^{(k-1)}(h)\| \leq (\|x\| + \|h\|)^k - \|x\|^k - k\|x\|^{k-1}\|h\|$$

En déduire que, x étant fixé, lorsque $h \to 0$:

$$e^{x+h} = e^x + \Lambda_x(h) + O(\|h\|^2)$$

3) Calculer $\Lambda_x(h)$ quand $xh = hx$.

Exercice 10. 1) Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une application linéaire Λ_A de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même telle que, lorsque $H \to 0$:

$$(A+H)^2 = A^2 + \Lambda_A(H) + O(\|H\|^2).$$

2) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Déterminer une application linéaire Λ_A de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même telle que, lorsque $H \to 0$:

$$(A+H)^{-1} = A^{-1} + \Lambda_A(H) + O(\|H\|^2).$$

Exercice 11. L'application

$$\Psi : L^m(E, L^n(E;F)) \to L^{n+m}(E;F)$$

définie par $g \in L^m(E, L^n(E;F))$ et $(x_1, \cdots, x_{n+m}) \in E^{n+m}$ par

$$\Psi(g)(x_1, \cdots, x_{n+m}) = g(x_1, \cdots, x_n)(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$$

est une isométrie de $L^m(E, L^n(E;F))$ dans $L^{n+m}(E;F)$.