Feuille 2

Exercice 1. Soit C une partie convexe et complète d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Le vecteur $p_C(x) = y \in C$ est caractérisé par $\forall z \in C$

$$\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0.$$

Exercice 2. Soit C une partie convexe et complète d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Exercice 3. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} l : & H & \rightarrow & H^* \\ & x & \mapsto & l_x \end{array}$$

où $l_x(y) = \langle x, y \rangle$, est une isométrie.

Exercice 4. Soit f un endomorphisme continu de l?espace de Hilbert réel H.
(i) Pour tout $y \in H$, justifier l'existence d'un unique $y' \in H$ tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, y' \rangle$ pour tout $x \in H$. On notera $f^*(y) := y'$ cet élément.
(ii) Montrer que l'application f^* est linéaire.
(iii) Montrer que f^* est continue et que $\|f^*\| \leq \|f\|$ (Prouver puis utiliser le fait que $\|y'\|$ est le maximum des $\langle x, y' \rangle$ pour $\|x\| \leq 1$.) Peut-on améliorer cette conclusion?

Exercice 5. Soient E et F des espaces normés, U un voisinage ouvert de a dans E et f est une application de U dans F . Montrer que, si l'on remplace les normes sur E et sur F par des normes équivalentes, la propriété de différentiabilité de f en a et la valeur de la différentielle de f en a ne changent pas.

Exercice 6. (i) On dit que f est positivement homogène de degré α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in E$. Montrer que, si f est positivement homogène de degré 1 et différentiable en 0, alors f est linéaire continue et $f = Df(0)$.
(ii) En déduire que l'application $x \rightarrow \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 7. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables. Calculer les dérivées partielles de:

$$a(x,y) = f(x+y), \quad b(x,y) = f(x^2 + y^6), \quad c(x,y) = f(xy), \quad d(x,y) = f(y),$$

$$e(x) = g(x,x), \quad m(x,y) = g(y,x), \quad n(x,y) = g(y, g(y,x)), \quad p(x,y) = g(y, y + g(y,y)),$$

$$q(x,y) = g(y, g(x+y, y) + h(x, x-y)), \quad s(x,y) = g(g(x,y), g(y,x)^4),$$

$$t(x,y) = g(x + h(y,x), xy + h(x,y)g(y,x)).$$

Exercice 8. Si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, étudier la différentiabilité des applications suivantes définies sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P) = \cos P(0), \quad g(P) = \int_0^1 P^4(t)dt, \quad h(P) = P'.$$

Exercice 9. Calculer la différentielle de det : $Mat_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Exercice 10. (i) On suppose f est différentiable en 0 et positivement homogène de degré α. En dérivant $x \to tx$, montrer que Df est positivement homogène de degré $\alpha - 1$.
(ii) En dérivant $t \to tx$, montrer que $Df(x)(x) = \alpha f(x)$.
(iii) En appliquant (ii) au cas d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$, retrouver l'identité d'Euler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$$

Exercice 11. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et F des espaces normés, $U \subset E_1 \times \cdots \times E_m$ ouvert et $f : U \to F$ une application. Montrer que f est de classe C^1 sur U si et seulement si des différentiells partielles D_i pour tout $i = 1, \cdots, m$ existent et sont continues sur U.

Exercice 12. Soient $E_1, \cdots, E_m$ et F des espaces normés et $f \in L(E_1, \cdots, E_m; F)$. Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 13. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit h par $h(x, y) = f(x, y)$ si $g(x, y) > 0$ et $h(x, y) = f(x, y) + [g(x, y)]^4$ si $g(x, y) \leq 0$. Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.