Feuille 3

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \to F$ continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $\forall t \in]a,b[$, $f'(t) \in C$, où C désigne un certain fermé convexe de F. Montrer qu'alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in C$$

Exercice 2. Soit E, F deux espaces normés et $U \subset E$un ouvert non vide de E. Soit $f : U \to F$ différentiable et k-lipschitzienne. Montrer qu'alors $\forall x \in U$

$$\|Df(x)\| \leq k$$

Exercice 3. Soit E un espace normé et $U \subset E$ un ouvert connexe non vide de E. On rappelle que si $a, b \in U$, on note $d_U(a,b)$ la borne inférieure des longueurs des lignes brisées joignant a à b. Montrer que d_U est une distance sur U.

Exercice 4. Soit $U \subset E$ un ouvert convexe d'un espace normé E et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Elle est dite fonction convexe sur U si, pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$,

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

a) On suppose que f est différentiable sur U. Montrer qu'elle est convexe sur U si et seulement si pour tous $x, y \in U$

$$f(y)-f(x) \geq Df(x)(y-x).$$

b) Si $E = \mathbb{R}$, montrer qu'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert U de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si sa dérivée est une fonction croissante sur U.

Exercice 5. Soit $U \subset E$ un ouvert convexe d'un espace normé E et $f : U \to F$ différentiable. Montrer l'équivalence des deux caractérisations suivantes de la différentiabilité stricte en a:

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que la fonction $f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)$ soit $\varepsilon > 0$-lipschitzienne sur la boule ouverte de centre a et de rayon η.

b) On peut écrire $f(x)-f(y)-Df(a)(x-y) = \|x-y\|\varphi(x,y)$ au voisinage de a, avec

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \varphi(x,y) = 0.$$

Exercice 6. Pour tout réel t, on note $[t]$ le plus petit entier $\geq t$. Montrer que la fonction définie pour $-1 < x < 1$ par :

$$f(x) := \int_0^{|x|} \frac{dt}{[t]}$$

est strictement différentiable en 0 et que $f'(0) = 0$, mais que f nest différentiable sur aucun voisinage de 0.

Exercice 7. Soit $U \subset E$ un ouvert d'un espace normé E et $f : U \to F$ différentiable et strictement différentiable en $a \in U$. Alors Df est continue en a.

Exercice 8. Soit $U \subset E$ un ouvert convexe d'un espace normé E et $f : U \to F$ différentiable sur $U \setminus \{a\}$, continue sur U et telle que $Df(x) \in L(E,F)$ admette une limite $l \in L(E,F)$ lorsque $x \to a$, $x \neq a$.

a) Pour tout $x \in U$, on introduit $\varphi : [0,1] \to F$ par $\varphi(t) = f(a + t(x-a)) - l(a) - t(l(x) - l(a))$. Justifier l'existence de *varphi* et montrer que φ est continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que φ est dérivable sur $]0,1[$ et que $\varphi'(t) = (Df(a+t(x-a)) - l)(x-a)$ pour tout $t \in]0,1[$. En déduire que

$$\|f(x) - f(a) - l(x-a)\| \leq (\sup_{z \in]a,x[} \|Df(z) - l\|_{L(E,F)}) \|x-a\|$$

c) Montrer que f est différentiable en a et que $Df(a) = l$.

Exercice 9. On considère la fonction suivante:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (1+\|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \end{array}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $s > 1$.

a) Montrer que f est C^1 et calculer sa différentielle en tout point.

b) Pour tout $s > 1$, montrer que $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$

$$|(1+\|x\|^2)^{s/2} - (1+\|y\|^2)^{s/2}| \leq s\|x-y\|(1+\max(\|x\|^2, \|y\|^2))^{\frac{s-1}{2}}$$

Exercice 10. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in C^1(I,\mathbb{R})$. On définit g par:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

a. Montrer que g est continue sur I^2, et de classe C^1 sur $I^2 - \Delta$ où $\Delta = \{(x,x), x \in I\}$.
b. Si $f''(x_0)$ existe, prouver que g est différentiable en (x_0, x_0).

Exercice 11. Soit $f : (x,y) \mapsto x - y + x^3 + y^3$. Quels sont les extrema de f sur $[0,1] \times [0,1]$?

Exercice 12. Montrer que la fonction

$$f \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl}]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 + \cos(x^2)\cos(y^2) \end{array} \right.$$

est convexe et déterminer ses extrema locaux.

Exercice 13. Déterminer les points critiques de la fonction $f : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$. Préciser leur nature.

Exercice 14. Quels sont les points critiques de $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2xy$? Sont-ils des extrema?

Exercice 15. Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \cos(x^4 + y^4)$ admet un maximum local strict en $(0,0)$.

Exercice 16. Soient E, F des espaces de Banach. Montrer que l'application $I : Isom(E,F) \to Isom(F,E)$ défini par $I(u) = u^{-1}$ est de classe C^∞.

Exercice 17. Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$. Le laplacien de f est, par définition, la fonction notée Δf définie dans l'ouvert U par la relation suivante:

$$\forall (x,y) \in U, \quad \Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

La fonction f est dite *harmonique* dans U, si et seulement si son laplacien est nul dans U, c'est-à-dire: $\forall (x,y) \in U, \quad \Delta f(x,y) = 0$.

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ (qui est muni de la norme euclidienne canonique). Soit $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon $r > 0$, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon r:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad \mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Etant donné un entier $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_p sur $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_p(x,y) = f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p}.$$

a) Démontrer l'existence d'un point $M_p = (a_p, b_p)$ appartenant au disque fermé $\mathcal{D}$ en lequel la fonction f_p, restreinte à $\mathcal{D}$, atteint son maximum:

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} f_p(x,y).$$

b) Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque $\mathcal{D}$, les deux dérivées secondes suivantes de f_p en M_p vérifient:

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

c) En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p, que le point M_p est situé sur le cercle $\mathcal{C}$.

d) Démontrer qu'il existe un point $P = (a,b) \in \mathcal{C}$ en lequel la fonction f atteint son maximum sur $\mathcal{D}$:

$$f(a,b) = \max_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y).$$

e) En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$, égales le long d'un cercle $\mathcal{C}$ du plan (de rayon strictement positif), sont égales sur tout le disque $\mathcal{D}$, de frontière $\mathcal{C}$.