Feuille 4

Exercice 1. a) Montrer que l'équation $\sin(x+y)+\cos(x-y)=1$ définit une fonction implicite ϕ telle que $\phi(0)=0$. Calculer la dérivée de ϕ en 0.
b) Mêmes questions pour l'équation $ye^x - x^2 = 0$.
c) Mêmes questions pour l'équation $x^y - y^x = 0$ avec la condition $\phi(1)=1$.

Exercice 2. Montrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ proche de I_n il existe une unique matrice B proche de I_n telle que $B^2 = A$.

Exercice 3. Prouver que si $4p_0^3 + 27q_0^2 \neq 0$ et si $x_0^3 + p_0x_0 + q_0 = 0$ alors pour (p,q) voisin de (p_0,q_0) l'équation $x^3+px+q=0$ a une unique solution dans un voisinage de x_0.

Exercice 4. E désigne l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $f : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(p,x)=p(x)$. Montrer que f est de classe C^1 et donner $d_xf(p,x)$. En déduire que si x_0 est une racine simple du polynôme p_0 alors il existe U un voisinage de p_0 et $\epsilon>0$ tel que pour tout $p\in U, p$ a une unique racine dans $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$.

Exercice 5. Soit $S=\{(x,y)/y\log x + x\log y = \log 2\}$ et $a=(1,2)$. Tracer S au voisinage de a.

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2 et g définie par $g(x,y,z)=f(x,y)-z$.

a) Soit (a,b,c) tel que $c=f(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$. Prouver que $g(x,y,z)=0$ définit x comme une fonction de (y,z) au voisinage de (a,b,c).

b) On note $x=\phi(y,z)$. Calculer $\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\partial z}$.

c) Résoudre localement
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 7. On note $f(t,x)=\sin(tx)+\cos(tx)$.

a) Montrer que $\forall t\in]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[$, il existe $\theta\in]0,1[$ tel que $\forall x,y\in\mathbb{R}$
$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq\theta|x-y|$$

b) En déduire que $\forall t\in]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[$, l'équation $f(t,x)=x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On notera $\phi(t)$ cette solution.

c) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'application ϕ est de classe C^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

d) Déterminer en 0 un développement limité de ϕ à l'ordre 3.

Exercice 8. Soit $\varphi\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)\neq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n>1$ et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que l'on peut définir une fonction z au voisinage de $(0,0)$ par $z(0,0)=0$ et $x^n+y^n+z^n=\varphi(ax+by+cz)$.

b) Montrer que
$$(cy^{n-1}-bz^{n-1})\frac{\partial z}{\partial x}+(az^{n-1}-cx^{n-1})\frac{\partial z}{\partial y}=bx^{n-1}-ay^{n-1}.$$

Exercice 9. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $f(x)=x+2x^2\sin 1/x$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0)\neq 0$, mais que f n'est pas bijective au voisinage de 0. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas?

Exercice 10. Soit $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|u'(t)|\leq k<1$. On définit l'application suivante:
$$\begin{aligned} f: R^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto (x-u(y),y+u(x))\end{aligned}$$
Prouver que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même (**Indication:** on vérifiera les hypothèses du théorème d'inversion globale et on pourra utiliser le théorème du point fixe afin de prouver la surjectivité de la fonction).

Exercice 11. Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans le cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$.

Exercice 12. On considère une boîte parallélépipédique de dimensions a,b,c.

a) Donner le volume et la surface de la boîte en fonction de $a,b,c>0$.

b) Déterminer le volume maximal d'une boîte fabriquée avec une surface de S m^2 de carton (**Indication:** on ramènera le problème à un problème d'extréma sous contraintes en précisant la fonction maximisée ou minimisée et la contrainte). On donnera les dimensions et le volume en fonction de S.

Exercice 13. Soient $A\in M_n(\mathbb{R}), B=\frac{1}{2}(A+{}^tA)$, $S=\{x\in\mathbb{R}^n/\|x\|=1\}$ et $\psi(x)=(x,Ax)$ où (x,y) est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

a) Monter que $\psi_{|S}$ a un minimum sur S en un point x_0, et que $Bx_0=\lambda_0x_0$.

b) Soit $S'=\{x\in S/(x,x_0)=0\}$. Montrer que $\psi_{|S'}$ a un minimum sur S' en un point x_1, et que $Bx_1=\lambda_1x_1+\mu_1x_0$. Calculer μ_1.

Exercice 14. Déterminer $d(0,\Gamma)$ où Γ est la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation:

a) $x^4=(y-1)^3$,

b) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,

c) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,

Exercice 15. On fixe trois réels positifs $0<c<b<a$ et on définit:
$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad / \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}$$

a) Montrer que S est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

(a) Montrer que f est bornée et qu'elle qu'elle atteint son sup et son inf en au moins un point de S. Montrer qu'un tel point est un point critique de $f/_S$.

(b) Déterminer les points critiques de $f/_S$.

(c) En déduire la distance de S à 0.

Exercice 16. Soit $\Psi:(x,y,z)\mapsto xyz-1$, et $\Sigma=\Psi^{-1}(0)$.

a) Soit $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2$. Montrer sans calcul que f a au moins 4 extrema sur Σ.

b) Déterminer ces points critiques et les multiplicateurs de Lagrange associés.