Université Paul Sabatier
L3 Enseignement, module Analyse 2

Année 2017–2018
Semestre 6

CC : Intégration, Équations différentielles (2h)

1 Intégration

1.1 Question de cours

Soit
$$f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto f(x, t).$$
On suppose que f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$. On considère alors
$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt.$$
Démontrer que F est continue sur $[\alpha, \beta]$. (Indication : on pourra admettre le théorème de Heine en dimension 2.)

1.2 Étude d'une fonction

On considère
$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(t) = 1 - \cos t - t.$$
a) Tracer le tableau de variations de f.
b) En déduire que
$$\forall t > 0, \quad \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1.$$

1.3 Convergence d'une intégrale impropre

On considère
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}\, dt.$$
c) Déterminer la nature de
$$I_1 = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}\, dt.$$
d) Déterminer la nature de
$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}\, dt.$$
En déduire la nature de I.
e) Soit $x \geq 1$. Déterminer la nature de
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-xt}\, dt.$$

1.4 Une fonction définie par une intégrale impropre à paramètre

On considère

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}\, dt.$$

f) Démontrer que F est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$.

g) Soit $x \geq 1$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\, dt.$$

(Indication : cela se traite de la même manière que le calcul de $\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\, dt$ vu en TD.)

En déduire une expression très simple pour $F'(x)$ sur $[1, +\infty[$.

h) À l'aide de la question a), montrer que

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

i) À l'aide des questions g) et h), trouver l'expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. En déduire la valeur de I.

2 Équations différentielles

2.1 Ordre 1 : calcul explicite

On considère

$$(E_1) : xu'(x) - 2u(x) = x^3 \sin x.$$

a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1) sur $]0, +\infty[$.

b) À l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E_1).

c) En déduire la solution générale de (E_1).

d) Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} xu'(x) - 2u(x) = x^3 \sin x, & x \in]0, +\infty[, \\ u(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

2.2 Ordre 2 : calcul explicite

Soient $\omega > 0$ et $\omega' > 0$. On considère

$$(E_2) : u''(t) + \omega^2 u(t) = \sin(\omega' t) :$$

cela peut provenir d'un ressort sur lequel on applique une force périodique $\sin(\omega' t)$.

a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_2).

b) On suppose $\omega' \neq \omega$. Déterminer une solution particulière u_p de (E_2) de la forme

$$u_p(t) = a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t).$$

En déduire la solution générale de (E_2), et résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u''(t) + \omega^2 u(t) = \sin(\omega' t), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

c) On suppose à présent que $\omega' = \omega$. Déterminer une solution particulière u_p de (E_2) de la forme

$$u_p(t) = a' t \cos(\omega t) + b' t \sin(\omega t).$$

En déduire la solution générale de (E_2), et résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u''(t) + \omega^2 u(t) = \sin(\omega t), \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Quelle différence importante constatez-vous sur la solution de ce problème, par rapport au précédent ?

d) La phrase suivante est tirée du livre "Analyse numérique" de M. Schatzman. Quelle interprétation pouvez-vous en donner (en quelques mots) ?

"En 1831, près de Manchester, un pont s'effondra au passage d'un détachement militaire marchant au pas. Depuis ce temps, les règlements militaires de tous pays imposent aux fantassins de quitter la cadence en passant sur un pont."

2.3 Non linéaire : étude qualitative

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_3) : u'(t) = \cos(u(t)).$$

a) Déterminer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le problème s'écrive

$$u'(t) = f(u(t)).$$

b) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

c) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(u(t)) \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

d) Déterminer les points d'équilibre du problème.

e) Déterminer la solution de chacun des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(u(t)) \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v'(t) = \cos(v(t)) \\ v(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

f) Soit $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère la solution w de

$$\begin{cases} w'(t) = \cos(w(t)) \\ w(0) = x_0 \end{cases}.$$

Étudier les variations de w, et déterminer ses limites éventuelles quand $t \to \pm\infty$.