Contrôle continu de l'option Graphes

durée : 1 H 30

On rappelle l'importance du soin apporté à la rédaction et à la justification des résultats énoncés

On rappelle aussi que $[n] = \{k,\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ pour tout entier $n > 0$.

Exercice 1 : Vrai ou Faux ? (justifier la réponse)

VF 1) Il y a exactement 2^n sous-ensembles de $[2n+1]$ de cardinal au plus n.

VF 2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $a_n = \dfrac{(3+\sqrt{6})^n}{\sqrt{6}} - \dfrac{(3-\sqrt{6})^n}{\sqrt{6}}$ est un nombre entier.

VF 3) Le nombre de parties de $[n]$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs est égal à $\dbinom{n-k+1}{k}$.

Exercice 2

Question A) Un panier de l'AMAP est constitué de n_p poires, n_a abricots, n_c choux et n_r radis avec $n_p+n_a+n_c+n_r = 12$. Sachant que tout panier doit respecter $n_p \in [\![2,4]\!]$, $n_a \in [\![2,5]\!]$, $n_c \in [\![1,4]\!]$ et $n_r \in [\![4,6]\!]$, combien de compositions de paniers distinctes sont possibles ? (justifier la réponse)

Question B) De combien de manières peut on distribuer 30 pièces de 1 euro à 2 garçons et 3 filles de sorte que chaque garçon ait au moins 2 euros et que chaque fille ait au moins 4 euros ? (justifier la réponse)

Question C) De combien de manières peut on distribuer 20 pièces de 1 euro à 2 garçons et 3 filles de sorte que chaque garçon ait au moins 2 euros, que chaque fille ait au moins 4 euros et que chacun ait au plus 5 euros ? (justifier la réponse)

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 4n + 5$ pour $n \geqslant 0$. Utiliser les séries génératrices pour trouver une expression explicite de a_n en fonction de n (formule fermée).

Exercice 4

notation : Si a, b, a', b' et n sont des entiers, on notera $(a,b) \equiv (a',b') \bmod n$ pour dire $\left\{\begin{array}{l} a \equiv a' \bmod n \\ \text{et} \\ b \equiv b' \bmod n \end{array}\right.$.

On rappelle que la suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer que l'on peut trouver deux entiers positifs k et l tels que $(F_k, F_{k+1}) \equiv (F_l, F_{l+1}) \bmod 1000$.
2. En déduire que $(F_{k-1}, F_k) \equiv (F_{l-1}, F_l) \bmod 1000$.
3. Conclure qu'il existe un entier N tel que 1000 divise F_N.
4. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Est-il vrai que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on peut trouve un entier n tel que a divise F_n ?

barème approximatif : 6 - 6 - 4 - 4

Correction du CC1 de l'option Graphes / L3 ESR **mardi 19 février 2019**

Exercice 1

VF 1) FAUX. On cherche le cardinal de $\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1])$, l'ensemble des parties de $[2n+1]$ de cardinal au plus n. Si on appelle $\mathscr{P}_{\geqslant n+1}([2n+1])$, l'ensemble des parties de $[2n+1]$ de cardinal au moins $n+1$, il est clair que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1]) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{\geqslant n+1}([2n+1]) \\ A & \longmapsto & [2n+1]\backslash A \end{array}$$

est bien définie et est bijective. Ainsi, $|\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1])| = |\mathscr{P}_{\geqslant n+1}([2n+1])|$. Par ailleurs, $\{\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1]), \mathscr{P}_{\geqslant n+1}([2n+1])\}$ est une partition de $\mathscr{P}([2n+1])$, l'ensemble des parties de $[2n+1]$. Puisque $|\mathscr{P}([2n+1])| = 2^{2n+1}$, on a

$$2^{2n+1} = |\mathscr{P}([2n+1])| = |\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1])| + |\mathscr{P}_{\geqslant n+1}([2n+1])| = 2\,|\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1])|$$

et on conclut que $|\mathscr{P}_{\leqslant n}([2n+1])| = \dfrac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$ (qui est la carré de $2n$).

VF 2) VRAI. Posons $\alpha = 3+\sqrt{6}$ et $\beta = 3-\sqrt{6}$. Puisque $\alpha+\beta = 6$ et $\alpha\beta = 9-6 = 3$, α et β sont les racines de X^2-6X+3. On en déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente vérifiant $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 3a_n$, pour $n \geqslant 2$. Comme $a_0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}} = 0$ et $a_1 = \dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} - \dfrac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2$, on conclut que a_n est un nombre entier pour tout entier $n \geqslant 0$.

VF 3) VRAI. En posant $b_i = a_i - 1$ et avec $i \in [k-1]$, on note les équivalences :

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_1 \\ a_k \leqslant n \\ a_{i+1} - a_i \geqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqslant a_1 \\ a_k + k - 1 \leqslant n + k - 1 \\ a_{i+1} - (i+1) + 1 - (a_i - i + 1) \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqslant b_1 \\ b_k \leqslant n + k - 1 \\ b_{i+1} - b_i \geqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi, en identifiant toute partie de $[n]$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs avec un k-uplet $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ tel que $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$ avec $a_{i+1} - a_i \geqslant 2$ pour $i \in [k-1]$, l'application qui transforme $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ en $(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ défini par $b_i = a_i + i - 1$ pour $i \in [k]$ définit une bijection de l'ensemble des parties de $[n]$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs vers $\mathscr{P}_k[n-k+1]$, l'ensemble des parties de $[n+k-1]$ de cardinal k. Comme $\left|\mathscr{P}_k([n-k+1])\right| = \dbinom{n-k+1}{k}$, c'est aussi le nombre demandé.

Exercice 2

Question A) Le nombre cherché est le coefficient de X^{12} dans le polynôme

$$P(X) = (X^2+X^3+X^4)(X^2+X^3+X^4+X^5)(X+X^2+X^3+X^4)(X^4+X^5+X^6)$$

Puisque $P(X) = X^9(1+X+X^2)(1+X+X^2+X^3)(1+X+X^2+X^3)(1+X+X^2)$, on cherche le coefficient de X^3 dans $Q(X) = (1+X+X^2)^2(1+X+X^2+X^3)^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} Q(X) & = & (1+X^2+X^4+2X+2X^2+2X^3)(1+X^2+X^4+X^6+2X+2X^2+2X^3+2X^3+2X^4+2X^5) \\ & = & (1+2X+3X^2+2X^3+X^4)(1+2X+3X^2+4X^3+3X^4+2X^5+X^6) \\ & = & 18X^3 + R(X) \end{array}$$

où $R(X)$ est un polynôme qui ne contient aucun monôme en X^3. Le nombre cherché est donc 18.

Question B) Après avoir distribué 2 euros à chaque garçon et 4 euros à chaque fille, il reste 14 euros à distribuer librement. Le nombre cherché est donc le nombre de 5-uplets $(g_1, g_2, f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{N}^5$ tels que $g_1+g_2+f_1+f_2+f_3 = 14$ où g_1, g_2 (resp. f_1, f_2, f_3) sont les sommes distribuées aux garçons (resp. aux filles). D'après le cours, nous savons que ce nombre est $\dbinom{14+5-1}{5-1} = \dbinom{18}{4} = \dfrac{15\times 16\times 17\times 18}{4!} = 15\times 4\times 17\times 3 = 3060$.

Question C) Cette fois-ci, on va compter les distributions d'une autre manière et remarquer que le nombre cherché est le coefficient de X^{20} dans le polynôme $P(X) = (X^2+X^3+X^4+X^5)^2(X^4+X^5)^3$. En effet, il apparaît un terme X^{20} dans $P(X)$ pour chaque $X^{g_1}X^{g_2}X^{f_1}X^{f_2}X^{f_3}$ avec $g_1+g_2+f_1+f_2+f_3 = 20$, $2 \leqslant g_i \leqslant 5$ si $i \in [2]$ et $4 \leqslant f_i \leqslant 5$ si $i \in [3]$ (autrement dit, g_1, g_2 sont les sommes distribuées aux garçons, tandis que f_1, f_2, f_3 sont celles distribuées aux filles). On a

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X^4+2X^5+3X^6+4X^7+3X^8+2X^9+X^{10})(X^{12}+3X^{13}+3X^{14}+X^{15}) \\ & = & X^{16}(1+2X+3X^2+4X^3+3X^4+2X^5+X^6)(1+3X+3X^2+X^3) \\ & = & X^{16}(26X^4+R(X)) \end{array}$$

où $R(X)$ est un polynôme sans monôme en X^4. Le nombre cherché est donc 26.

Exercice 3 On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la série génératrice associée à la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$. De $a_{n+1} = a_n + 4n + 5$, on déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + 4n + 5)x^{n+1}$, soit encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - a_0 = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 4x^2\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + 5x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Avec $a_0 = 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, on obtient

$$f(x) - 1 = xf(x) + 4x^2\frac{1}{(1-x)^2} + 5x\frac{1}{1-x}$$

Soit encore $(1-x)f(x) = \frac{4x^2 + 5x(1-x)}{(1-x)^2} + 1$ et $f(x) = \frac{-x^2 + 5x + (1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{3x+1}{(1-x)^3}$. On calcule alors la décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{3x+1}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$$

- $\times(1-x)^3$ puis $x = 1$ donne $4 = C$.
- $\times(1-x)$ puis $x \to +\infty$ donne $0 = -A$
- $x = 2$ donne $-7 = -A + B - C$ et $B = -7 + C = -3$.

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{3}{(1-x)^2} + 4\frac{4}{(1-x)^3} &= -3\left(\frac{1}{1-x}\right)' + 4\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)'' \\
&= -3\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\big(-3(n+1) + 2(n+2)(n+1)\big)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\big(2n^2 + 3n + 1\big)x^n
\end{aligned}$$

et on conclut que $a_n = 2n^2 + 3n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (et, à titre de vérification, on notera que l'on a bien $a_0 = 1$ et $a_{n+1} - a_n = 4n + 5$).

Exercice 4

On rappelle que, pour deux entiers a et n, a mod n désigne le reste de la divison euclidienne de a par n.

1. L'ensemble $\{(F_k \bmod 1000, F_{k+1} \bmod 1000),\ k \in \mathbb{N}\}$ est de cardinal au plus $1000^2 = 10^6$ (puisque il y a au plus 1000 valeurs possibles pour chaque coordonnée). Par conséquent, il suffit de considérer l'ensemble de couples $\{(F_k, F_{k+1}),\ 0 \leqslant k \leqslant 10^6\}$ de cardinal $10^6 + 1$ pour être certain, d'après le Lemme des tiroirs, qu'il contiendra au moins deux couples (F_k, F_{k+1}) et (F_l, F_{l+1}) tels que $F_k \equiv F_l \bmod 1000$ et $F_{k+1} \equiv F_{l+1} \bmod 1000$ avec $k < l$. On a ainsi trouvé deux entiers positifs k et l tels que $(F_k, F_{k+1}) \equiv (F_l, F_{l+1}) \bmod 1000$.

2. D'après la relation de récurrence que vérifie la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$, on a $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Par conséquent, de $F_k \equiv F_l \bmod 1000$ et $F_{k+1} \equiv F_{l+1} \bmod 1000$, on déduit que $F_{k+1} - F_k \equiv F_{l+1} - F_l \bmod 1000$, soit encore et $F_{k-1} \equiv F_{l-1} \bmod 1000$. Cela montre que l'on a également $(F_{k-1}, F_k) \equiv (F_{l-1}, F_l) \bmod 1000$.

3. Par une récurrence immédiate, il découle de la question 2 (et en tenant compte de $k < l$) que, partant de $(F_k, F_{k+1}) \equiv (F_l, F_{l+1}) \bmod 1000$, on arrive à $(F_1, F_2) \equiv (F_{l-k+1}, F_{l-k+2}) \bmod 1000$. Autrement dit, il existe un entier m tel que $(F_1, F_2) \equiv (F_m, F_{m+1}) \bmod 1000$. Mais $F_1 = F_2 = 1$ et cela signifie qu'on a donc $F_m \equiv F_{m+1} \bmod 1000$ et, par conséquent, $F_{m-1} = F_{m+1} - F_m \equiv 0 \bmod 1000$. Dit autrement, on a trouvé un entier N (égal à $l - k$ avec les notations introduites) qui est un multiple de 1000.

4. Le raisonnement suivi dans les questions 1 à 3 reste vrai si on remplace le nombre 1000 par n'importe quel entier non nul. Il est donc vrai que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un entier n tel que a divise F_n.