Examen de l'option Graphes

DURÉE : 2 H 00

On rappelle l'importance du soin apporté à la rédaction et à la justification des résultats énoncés

Tous les graphes considérés ici sont finis et simples.

Exercice 1 : Vrai ou Faux ?

(justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

VF 1) Si $d(x) \geqslant k$ pour tout sommet x du graphe X, alors X contient un chemin de longueur au moins k.

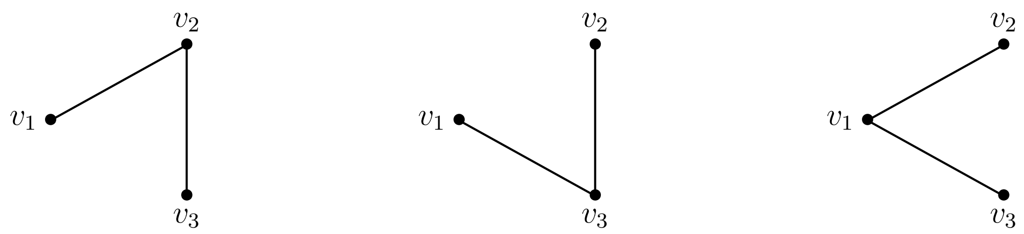
VF 2) Si $d(x) \geqslant k \geqslant 2$ pour tout sommet x du graphe X, alors X contient un cycle de longueur au moins $k+1$.

VF 3) Tout arbre possédant un sommet de degré $k \geqslant 1$ possède au moins k feuilles (on rappelle qu'une feuille est un sommet de degré 1).

VF 4) Un graphe eulérien possédant un nombre pair de sommets a un nombre pair d'arêtes.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne un ensemble $V_n = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de cardinal n et on appelle $\mathscr{G}_n$ l'ensemble des graphes (simples) dont V_n est l'ensemble des sommets ; autrement dit, $\mathscr{G}_n$ est l'ensemble des graphes simples à n sommets et on introduit l'ensemble V_n uniquement pour souligner que l'on compte tous les graphes (simples). Par exemple, pour $n = 3$, les trois graphes suivants sont distincts :



1. Déterminer le cardinal de $\mathscr{G}_n$.

2.a) Montrer que, pour tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

2.b) On note $\mathscr{G}_n^0$ le sous-ensemble de $\mathscr{G}_n$ formé des graphes dont tous les sommets sont de degré pair. Déterminer le cardinal de $\mathscr{G}_n^0$.

Exercice 3

Soit $T = (V, E)$ un arbre. On rappelle que $d(v)$ désigne le degré du sommet v. Par ailleurs, on note V_i l'ensemble de sommets de degré 2.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{v \in V} d(v) < 2|V|$.

2. On suppose que T ne contient aucun sommet de degré 2 (i. e., $V_2 = \varnothing$). Montrer que le nombre de feuilles de T (c'est-à-dire, $|V_1|$) est strictement plus grand que le nombre de tous les autres sommets.

Exercice 4

Soit $X = (V(X), E(X))$ un graphe à au moins 3 sommets. Le but de cet exercice est de montrer l'implication

$$(**) \qquad |E(X)| > \binom{|V(X)|-1}{2} + 1 \implies X \text{ est hamiltonien}$$

1. Rappeler la définition d'un cycle hamiltonien et d'un graphe hamiltonien.

2. Soit n entier, $n \geqslant 4$. On suppose que la formule $(**)$ est vérifiée pour tout graphe possédant au plus $(n-1)$ sommets et on se donne un graphe $X = (V(X), E(X))$ avec $|V(X)| = n$ et $|E(X)| > \binom{n-1}{2} + 1$.

2.a) Montrer que X possède un sommet v tel que $d(v) \geqslant n-2$ (où $d(v)$ est le degré du sommet v).

2.b) En considérant $X - v$, montrer que X est hamiltonien (indication : distinguer les cas $d(v) = n-2$ et $d(v) = n-1$).

3. Prouver la formule $(**)$.

Exercice 5

Soit $X = (V, E)$ un graphe : on note $n = |V|$ et $m = |E|$ et on rappelle la formule (inégalité de Cauchy-Schwartz) : $\quad (\dagger) \quad \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$

1.a) Soient $x, y \in V$. Montrer que $|N(x) \cap N(y)| \geqslant d(x) + d(y) - n$, $N(x)$ désignant le voisinage de x et d(x) le degré de x (et donc $d(x) = |N(x)|$).

1.b) Soit $\mathscr{T}$ le nombre de triangles de X (un triangle est un sous-graphe de X isomorphe au graphe complet K_3). Montrer que $\mathscr{T} \geqslant \frac{1}{3} \sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y) - n)$.

2. En déduire que $\mathscr{T} \geqslant \frac{1}{3} \left(\sum_{x \in V} d(x)^2 - mn \right)$.

3. Conclure qu'un graphe à n sommets et m arêtes contient au moins $\frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4} \right)$ triangles.

BARÈME APPROXIMATIF : 5 - 3,5 - 2,5 - 6 - 3

correction de l'examen de l'option Graphes

Exercice 1 : Vrai ou Faux ?

(justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

VF 1) VRAI. Soit P un chemin maximal de X et u, une extrémité de P. Puisque P est maximal les voisins $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sont des sommets de P (car, si un v_i n'était pas dans P, on pourrait prolonger P avec l'arête uv_i). Par conséquent, $|V(P)| \geqslant k+1$, i.e. P est un chemin de longueur au moins k.

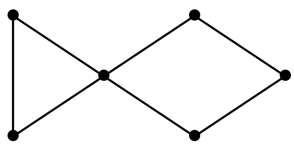
VF 2) VRAI. Avec les notations de la question précédente, supposons (quitte à renommer les voisins de u) que v_k soit le sommet le plus éloigné de u sur le chemin P ; l'ajout de l'arête uv_k donne alors un cycle de longueur au moins $k+1$.

VF 3) VRAI. Nous allons le montrer par un raissonnement pat récurrence sur le degré k d'un sommet x de l'arbre. Si $k = 1$, x est une feuille (et la proprité demandée est vraie). Supposons que la propriété soit vraie pour tout sommet de degré inférieur ou égal à k pour un $k \geqslant 1$ et supposons que $d(x) = k+1$. Si n est le nombre de sommets du graphe, notons d_1, d_2, $\ldots$, d_n la suite des degrés des sommets de l'arbre et soit f le nombre de feuilles (i. e., de sommets de degré 1). On peut donc supposer que $d_1 = d_2 = \ldots = d_f$, $d_{f+1} = d(x) = k+1$. Comme le graphe est un arbre, on sait que le nombre d'arêtes du graphe est $n-1$ et on obtient donc l'inégalité (vu que $d_i \geqslant 2$ si $i > f+1$) :

$$2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i = f + (k+1) + \sum_{i=f+2}^{n} d_i \geqslant f + k + 1 + 2(n-f-1) = -f + k + 1 + 2(n-1)$$

équivalente à $f \geqslant k+1$.

VF 4) Un graphe eulérien possédant un nombre pair de sommets a un nombre pair d'arêtes.
FAUX. Voici un exemple de graphe eulérien (tous ses sommets sont de degré pair) avec un nombre pair de sommets et un nombre impair d'arêtes :



Exercice 2

1. Soit $X \in \mathscr{G}_n$. L'ensemble $E(X)$ des arêtes de X est une partie de $\mathscr{P}_2(V_n)$, l'ensemble des paires ou sous-ensembles de cardinal 2 de V_n. Puisque V_n est de cardinal n, il y a donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}_2(V_n))$ choix possibles, soit encore $2^{\binom{n}{2}}$ choix possibles pour $E(X)$. En conclusion, $|\mathscr{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.

2.a) Dans tout graphe X, on sait $\displaystyle\sum_{x \in V(X)} d(x) = 2|E(X)|$ (la somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes). Il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{x \in V(X), d(x) \text{ impair}} d(x) = 2|E(X)| - \sum_{x \in V(X), d(x) \text{ pair}}$ est pair ; autrement dit, le nombre de sommets de degré impair est pair.

2.b) Si l'on prend un graphe simple, on sait qu'il a un nombre pair de sommets impair ; appelons-les $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ (avec $k = 0$ si tous les sommets sont de degré pair) et si on lui ajoute un nouveau sommet z avec les arêtes zx_i pour $1 \leqslant i \leqslant 2k$, on obtient un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Réciproquement, si on prend un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, la suppression d'un sommet donne un graphe quelconque (avec un sommet de moins). Cette correspondance donne une bijection entre $\mathscr{G}_n^0$ et $\mathscr{G}_{n-1}$. Précisément, on a $f : \mathscr{G}_{n-1} \to \mathscr{G}_n^0$ qui associe au graphe $X \in \mathscr{G}_{n-1}$ le graphe X' obtenu en ajoutant le sommet v_n à X et les arêtes $v_n v_i$ pour tout $i \in [n-1]$ tel que $d(v_i)$ soit impair. D'autre part, on a $g : \mathscr{G}_n^0 \to \mathscr{G}_{n-1}$ qui fait corresponde à $X \in \mathscr{G}_n^0$ le graphe obtenu en supprimant v_n. Clairement, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}_n^0}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}_{n-1}}$.

En conclusion, $|\mathscr{G}_n^0| = 2^{\binom{n-1}{2}}$.

Exercice 3

1. Dans tout graphe, on sait que $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$. Par ailleurs, lorsque le graphe est un arbre, on sait que $|E| = |V| - 1$. On a ainsi $\sum_{v\in V} d(v) = 2(|V|-1) < 2|V|$.

2. En utilisant la question précédente et $V_2 = \varnothing$, on obtient

$$2|V| > \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in V_i} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{v\in V_i} d(v) = |V_1| + \sum_{i=3}^{n} i|V_i| \geqslant |V_1| + 3\sum_{i=3}^{n}|V_i| = |V| + 2\sum_{i=3}^{n}|V_i|$$

d'où $|V| > 2\sum_{i=3}^{n}|V_i|$, soit encore $|V_1| + \sum_{i=3}^{n}|V_i| > 2\sum_{i=3}^{n}|V_i|$ ou encore $|V_1| > \sum_{i=3}^{n}|V_i|$ qui est l'inégalité cherchée.

Exercice 4

1. Un cycle hamiltonien dans un graphe X est un cycle de X qui passe par tous les sommets de X. Un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

2.a) Si l'on suppose que $d(x) \leqslant n-3$ pour tout sommet x de X, alors

$$|E(X)| = \frac{1}{2}\sum_{x\in V(X)} d(x) \leqslant \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2-3n}{2} < \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2} < \binom{n-1}{2} + 1$$

Ceci contredisant l'hypothèse faite sur E, on conclut que X possède un sommet v tel que $d(v) \geqslant n-2$.

b. L'idée est de considérer alors le graphe $X - v$ en séparant les cas $d(v) = n-1$ et $d(v) = n-2$.

Cas 1 : $d(v) = n-2$ on obtient

$$\begin{aligned} |E(X-v)| &= |E(X)| - (n-2) \\ &\geqslant \binom{n-1}{2} + 1 - (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-2) + 1 = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 = \binom{n-2}{2} + 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut appliquer $(**)$ à $X-v$ et conclure que $X-v$ est hamiltonien. Soit à présent C un cycle hamiltonien dans $X-v$. Il est de longueur $n-1 \geqslant 3$ et, v ayant $n-2$ voisins dans X, il existe au moins deux sommets consécutifs a et b du cycle C qui sont des voisins de v. En remplaçant l'arête ab du cycle C par le chemin $a - v - b$, on obtient un cycle hamiltonien dans X.

Cas 2 : $d(v) = n-1$ A présent, on a seulement $|E(X-v)| \geqslant \binom{n-2}{2} + 1$ et on ne peut pas appliquer $(**)$ à $X - v$. On va alors distinguer deux sous-cas.

sous-cas 1. $X - v$ est complet. Alors $X - v$ est hamiltonien (un graphe complet est hamiltonien) et son sur-graphe X est donc aussi hamiltonien.

sous-cas 1. $X - v$ n'est pas complet. Soit alors X' le graphe obtenu en ajoutant une arête e à $X - v$. Ainsi, on a $|E(X')| = |E(X-v)| + 1 > \binom{n-2}{2} + 1$, on peut appliquer $(**)$ à X' et conclure que X' est hamiltonien. Soit C un cycle hamiltonien dans X'. Si e n'est pas une arête de C, alors C est un cycle hamiltonien dans $X - v$ et on conclut que X est hamiltonien comme dans le cas 1. Si e est une arête de C, le chemin $C - e$ (le cycle C privé de l'arête e) est un chemin hamiltonien dans $X - v$ (il passe par tous les sommets de $X - v$). Comme $d(v) = n-1$, v est voisin de tous les sommets de $X - v$ et on obtient un cycle hamiltonien dans X en « aboutant » les extrémités de $C - e$ par l'ajout du chemin $a - v - b$ (i.e., en ajoutant les arêtes av et vb) en appelant a et b sont les extrémités du chemin $C - e$,

3. D'après la question précédente, pour prouver la formule $(**)$ par récurrence sur k, le nombre de sommets du graphe, il ne reste plus qu'à montrer que la formule est vraie pour $k = 3$. Dans ce cas, $|E(X)| > \binom{n-1}{2} + 1$ signifie $|E(X)| > \binom{2}{2} + 1 = 2$, soit $|E(X)| \geqslant 3$. La seule possibilité est $X = K_3$, le graphe complet à 3 sommets qui est bien entendu hamiltonien (car il est isomorphe au cycle C_3). La formule $(**)$ est donc démontrée.

Exercice 5

1.a) Soient $x, y \in V$. Il suffit de noter que $|N(x) \cap N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cup N(y)| = d(x) + d(y) - |N(x) \cup N(y)|$ et que $|N(x) \cup N(y)| \leqslant |V| = n$ (puisque $N(x) \cup N(y) \subset V$) pour conclure que $|N(x) \cap N(y)| \geqslant d(x) + d(y) - n$.

1.b) Ainsi, si $\{x, y\} \in E$, il y a au moins $d(x) + d(y) - n$ sommets adjacents à x et à y. Par conséquent, X contient au moins $d(x) + d(y) - n$ triangles qui contiennent l'arête $\{x, y\}$. Selon ce décompte, un triangle est compté trois fois (une fois pour chaque arête qu'il contient) et on peut donc conclure que $\mathscr{T} \geqslant \frac{1}{3} \sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y) - n)$.

2. Dans la somme $\sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y))$, $d(x)$ apparaît $d(x)$ fois (puisqu'il y a $d(x)$ arêtes incidentes à x) et on a donc l'égalité $\sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y)) = \sum_{x \in V} d(x)^2$ et, par suite,

$$\mathscr{T} \geqslant \frac{1}{3} \sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y) - n) = \frac{1}{3} \left(\sum_{\{x,y\} \in E} (d(x) + d(y)) - \sum_{\{x,y\} \in E} n \right) = \frac{1}{3} \left(\sum_{x \in V} d(x)^2 - mn \right)$$

3. On sait que $\sum_{x \in V} d(x) = 2\,|E| = 2m$ et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient $\sum_{x \in V} d(x)^2 \geqslant \dfrac{\left(\sum_{x \in V} d(x) \right)^2}{n} = \dfrac{(2m)^2}{4} = \dfrac{4m^2}{n}$ et donc $\mathscr{T} \geqslant \frac{1}{3} \left(\sum_{x \in V} d(x)^2 - mn \right) \geqslant \frac{1}{3} \left(\frac{4m^2}{n} - mn \right) = \frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4} \right)$.