Questions de cours pour le contrôle du 14/03

On pourra admettre $f \in \mathcal{H}(U) \iff f \in \mathcal{A}(U)$.

Théorème 1 = Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$.
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour toute triangle Δ inclus dans U, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.
Alors, f est holomorphe.

Théorème 2 = (Lemme de Schwarz). $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \}$.

Soit $f : \Delta \to \Delta$ analytique telle que $f(0) = 0$. Alors,

1) Pour tout $z \in \Delta$ $\quad |f(z)| \leq |z|$

2) S'il existe $z_0 \neq 0$ dans Δ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors f est une rotation c'est à dire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que.
$\forall z \in \Delta \quad f(z) = e^{i\theta} z$.

Remarque concernant le théorème 1.

C'est une proposition rappelée au début du III Théorème de Cauchy.

Cette proposition a été démontrée dans $\boxed{\text{II}}$ 4) Primitive d'une fonction analytique mais avec un énoncé différent qui est : U ouvert étoilé, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \quad \forall \Delta \subset U$ Δ triangle alors il existe F holomorphe tel que $F' = f$.