Université Paul Sabatier
L3 Enseignement, module Analyse 2

Année 2018–2019
Semestre 6

Analyse 2 - CC - 7 mars 2019

Intégration, équations différentielles (2h)

(Documents, calculatrices et téléphones interdits. Le barème est donné à titre indicatif pour donner une idée du poids de chaque partie et pourra être modifié.)

1 Fonctions définies par des intégrales impropres à paramètre (10 pts)

Soient

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad h(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2},$$

fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel x, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $F(0)$ et montrer que F est bornée.

3) Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 et que $H - H'' = F$.

4) Montrer que $2H'(x) = -xF(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

5) Déduire des deux points précédents que

a) sur $\mathbb{R}^*$, F est dérivable et $xF'(x) = F(x) - 2H(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}^*$), puis
b) sur $\mathbb{R}^*$, F est deux fois dérivable et $F'' = F$.

6) Déduire des questions 5b) et 2) l'expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

7) Déduire l'expression explicite de $H'(x)$ pour tout $x \geq 0$.

8) Donner les valeurs explicites des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

2 Équations différentielles linéaires (8 pts)

2.1 Équations différentielles d'ordre 1 (4 pts)

On considère, sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(E_1): \quad x\left(1+\ln^2 x\right) y'(x) + 2\ln(x) y(x) = 1.$$

1) Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{-2t}{1+t^2}$ et en déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{-2\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

2) Résoudre l'équation homogène associée à (E_1).

3) Résoudre l'équation (E_1).

4) Donner la solution de (E_1) qui satisfait $y(\mathrm{e}) = 1$

2.2 Équations différentielles d'ordre 2 (4 pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E_2): \quad x^2 y''(x) + x y'(x) + y(x) = 0.$$

1) On appelle $\mathcal{S}_H$ l'espace vectoriel formé par les solutions de (E_2) sur $]0, +\infty[$: quelle est sa dimension ?

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. En exprimant $y(x)$ en fonction de z (et de x), montrer que y est solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on précisera.

3) Résoudre l'équation (E_2) sur $]0, +\infty[$.

3 Calculs d'aire (2 pts)

1) Représenter sur un même graphique l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et l'ensemble $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x^2\}$.

2) Soit D l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \mid x^2 + y^2 \geq 1, \ y \leq 1 + x^2\}.$$

Calculer l'aire de D.