Université Paul Sabatier | Année 2018–2019
L3 Enseignement, module Analyse 2 | Semestre 6

Analyse 2 - corrigé du CC de mars 2019
Intégration, équations différentielles (2h)

1 Fonctions définies par des intégrales impropres à paramètre (10 pts)

1) Pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est localement intégrable (car continue) et majorée en module par la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, qui est indépendante de x et dont l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ est convergente. Par conséquent, F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^0}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad |F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t = F(0)$.

3) H est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ par les mêmes arguments (mutatis mutandis : l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est convergente).

Pour tout $t \in]-\infty, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2}$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{i}t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2}$ (continue) est majorée en module par la fonction $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$, qui est indépendante de x et dont l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ est convergente d'après le critère de Riemann (car $\frac{t}{(1+t^2)^2} \sim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t^3}$). Par conséquent, H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

De même, H' est de classe C^1 (donc H de classe C^2) et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}t)^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

(mutatis mutandis : l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ de la majorante $t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ est convergente).

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) - H''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = F(x).$$

4) Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
2H'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-1}{1+t^2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{1+t^2}\mathrm{i}^2 x\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - x\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -xF(x).
\end{aligned}$$

5) D'après les deux points précédents, sur $\mathbb{R}^*$:

a) $x \mapsto F(x) = -\frac{2H'(x)}{x}$ est dérivable et (en dérivant l'équation obtenue dans 4 puis en utilisant 3)

$$-F(x) - xF'(x) = 2H''(x) = 2\left(H(x) - F(x)\right),$$

ce qui se simplifie en $xF'(x) = F(x) - 2H(x)$;

b) $x \mapsto F'(x) = \frac{F(x)-2H(x)}{x}$ est dérivable et (en dérivant l'équation obtenue dans a puis en utilisant 4)

$$F'(x) + xF''(x) = F'(x) - 2H'(x) = F'(x) + xF(x),$$

autrement dit (toujours sur $\mathbb{R}^*$) : F est deux fois dérivable et $F'' = F$.

6) D'après 5b), pour tout $x > 0$ et même (par continuité de F en 0) pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) = a\,\mathrm{e}^{x} + b\,\mathrm{e}^{-x},$$

pour certains réels a et b à déterminer. D'après 2), $a + b = \pi$ et $a = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \pi\,\mathrm{e}^{-x}.$$

7) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad H'(x) = -\frac{x}{2}F(x) = -\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

8) Par parité de cos et imparité de sin,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{F(1)}{2} = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{H'(1)}{2} = \frac{\pi}{4\mathrm{e}}.$$

2 Équations différentielles linéaires (8 pts)

2.1 Équations différentielles d'ordre 1 (4 pts)

1) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{-2t}{1+t^2}$ est $t \mapsto -\ln(1+t^2)$ donc (par changement de variable $t = \ln x$) une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{-2\ln x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$ est $x \mapsto -\ln(1+\ln^2 x)$.

2) Les solutions (sur $]0, +\infty[$) de

$$x\left(1+\ln^2 x\right)y'(x) + 2\ln(x)y(x) = 0$$

sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-\ln(1+\ln^2 x)} = \frac{C}{1+\ln^2 x} \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

3) Par variation de la constante, les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme $y(x) = \frac{C(x)}{1+\ln^2 x}$ avec C fonction solution de

$$x\left(1+\ln^2 x\right)\frac{C'(x)}{1+\ln^2 x} = 1,$$

c'est-à-dire

$$C(x) = K + \ln x \qquad (K \in \mathbb{R})$$

donc

$$y(x) = \frac{K + \ln x}{1 + \ln^2 x} \qquad (K \in \mathbb{R}).$$

4) La condition initiale $y(\mathrm{e}) = 1$ équivaut alors à $\frac{K+1}{2} = 1$ donc à $K = 1$, et la solution correspondante est donc $y(x) = \frac{1+\ln x}{1+\ln^2 x}$.

2.2 Équations différentielles d'ordre 2 (4 pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E_2): \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$$

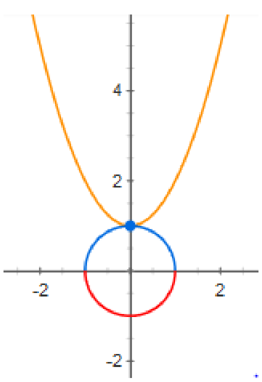
1) $\dim \mathcal{S}_H = 2$.

2) y est deux fois dérivable $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'on a alors (pour tout $x > 0$) :
$y(x) = z(\ln x)$, $xy'(x) = z'(\ln x)$ et $xy'(x) + x^2 y''(x) = z''(\ln x)$ donc y est solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z'' + z = 0$.

3) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $z'' + z = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto a\cos t + b\sin t$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) donc les solutions de (E_2) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto a\cos\ln x + b\sin\ln x$.

3 Calculs d'aire (2 pts)

1)



2) L'aire de D est égale à $A_P - A_C$ avec $A_P = \int_0^1 (1 + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$ et $A_C = \frac{\pi}{4}$ (aire du quart de disque unité).