Exercices du chap. 1 : Logique et raisonnements

(avec trois exercices supplémentaires ajoutés le 18/09/2018)

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

1. Si $1+1=3$, alors $1+1=2$.
2. Si $1+1=2$, alors $1+1=3$.
3. Il n'est pas vrai que " $1+1=2$, si $1+1=3$. "
4. Il n'est pas vrai que $1+1=3$, si $1+1=2$.
5. $1+1=3$ si, et seulement si, $3+14=\pi$.
6. $-\sqrt{2}>0$ si, et seulement si, $(-\sqrt{2})^2>0^2$.
7. Un entier naturel est positif si, et seulement si, son carré est positif.

Exercice 2 : 1. On considère les assertions P : " il pleut" et Q : " je suis mouillé". Donner des énoncés en français qui traduisent les assertions suivantes :

a) $\neg P$ b) $\neg\neg Q$ c) $P\wedge Q$ d) $Q\Rightarrow P$ e) $P\vee\neg P$

f) $\neg P\wedge Q$ g) $\neg(P\wedge Q)$ h) $\neg P\wedge\neg Q$

2. Simplifier les énoncés suivants :

a) Il n'est pas vrai que s'il pleut, il fait froid.

b) Il n'est pas vrai que " les coquelicots sont rouges si, et seulement si, les violettes sont bleues".

c) Il n'est pas vrai que " les champignons ne poussent pas s'il ne fait pas soleil".

Exercice 3 : QCM (extrait du CC de novembre 2017)

1. La négation de la proposition “S'il fait beau, je vais à la plage” est :
   (a) S'il fait beau, je ne vais pas à la plage.
   (b) S'il ne fait pas beau, je ne vais pas à la plage.
   (c) S'il ne fait pas beau, je vais à la plage.
   (d) Il fait beau et je ne vais pas à la plage.
2. La proposition “Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas souvent" équivaut à :
   (a) Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas.
   (b) Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop.
   (c) Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop.
   (d) Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent.

Exercice 4 : 1. Montrer qu'il y a 4 connecteurs unaires et écrire leurs tables de vérité.

2. a) Ecrire les tables de vérité des trois connecteurs binaires $\veebar$, $|$ et $\|$, définis par :

i) $\veebar$ est le connecteur de *disjonction exclusive* (" OU exclusif") : $P \veebar Q$ est vraie si l'on a P ou Q mais pas les deux à la fois.

ii) $|$ (barre de Sheffer) est le connecteur d'*incompatibilité* (" NAND" ou " NON ET") : $P|Q$ signifie que P exclut Q (ou encore que l'on ne peut pas avoir P et Q la fois).

iii) $\|$ (connecteur de Pierce) est le connecteur de *rejet* (" NOR" ou " NON OU") : $P \parallel Q$ signifie que l'on n'a ni P, ni Q.

b) Montrer que tous les connecteurs logiques usuels peuvent être définis en utilisant uniquement la barre de Sheffer, et que le connecteur de Pierce peut jouer le même rôle.

c) Montrer qu'il y a 16 connecteurs binaires et écrire leurs tables de vérité.

3. Combien y a-t-il de connecteurs ternaires ?

Exercice 5 : 1. Vérifier à l'aide des tables de vérité les équivalences logiques suivantes :

a) $\neg\neg P \equiv P$, *b)* $P \vee Q \equiv Q \vee P$, *c)* $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$,

d) $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$, *e)* $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R)$.

2. En déduire :

a) $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$, *b)* $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$,

c) $(Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P) \equiv P$, *d)* $(\neg P \Rightarrow P) \equiv P$.

3. Dans chacun des cas suivants, écrire la table de vérité de l'assertion et trouver une assertion équivalente plus simple :

a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, *b)* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$, *c)* $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$.

Exercice 6 : 1. Que peut-on dire de l'assertion P lorsque l'assertion " $P \Rightarrow Q$" est vraie

a- avec Q qui est fausse ? b- avec Q qui est vraie ?

2. Mêmes questions lorsque l'assertion " $Q \Rightarrow P$" est vraie

3. Étant donné une assertion P fixée, que peut-on dire de l'assertion Q telle que $P \vee Q$ soit une tautologie et $P \wedge Q$ une contradiction ?

Exercice 7 : On considère trois propositions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et l'on suppose que $\mathcal{A} \Leftrightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ et $\mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{C})$. En déduire les valeurs de vérité de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 8 : (Posé au CC de novembre 2017 avec $a = 1$ et $b = k = 2$)

Soient $a, b, k \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $k > 1$. Déterminer les réels x tels que

$$\forall y \in [a, b] \quad (x \geq y \Rightarrow x \geq ky)\,.$$

Exercice 9 : (Posé à la session 2 de juin 2018)

1. Donner un exemple simple d'ensemble E, et de choix d'interprétation sur E des prédicats P et Q, tel que les énoncés suivants soient vrais tous les deux :

$$\begin{array}{lll} A : & \exists x \in E & \neg P(x) \\ B : & \exists x \in E & [P(x) \wedge \neg Q(x)]\,. \end{array}$$

2. Pour tout (E, P, Q) vérifiant A et B, donner (en justifiant !) la valeur de vérité de chacun des deux énoncés :

$$\begin{aligned} C : &\quad [\forall x \in E \quad P(x)] \Longrightarrow [\forall x \in E \quad Q(x)] \\ D : &\quad \forall x \in E \quad [P(x) \Longrightarrow Q(x)]\,. \end{aligned}$$

Exercice 10 : Dans chaque cas, écrire en langage quantifié la négation de l'assertion (on précisera, quand c'est possible, la valeur de vérité des assertions):

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x > 3 \text{ et } x \leq -2)$
2. $\exists\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x > y + z,\ x - y \neq y - z \text{ et } -1 \leq z \leq 2)$
3. $\forall\, a \in \mathbb{N},\ \exists\, (b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a = bc$
4. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \exists\, c \in \mathbb{N},\ a = bc$
5. $\exists\, a \in \mathbb{N},\ \forall\, b \in \mathbb{N},\ \exists\, c \in \mathbb{N},\ a = bc$
6. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \ \Rightarrow\ \exists\, q \in \mathbb{Q},\ a < q < b$
7. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
8. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq M$

Exercice 11 : Redémontrer le théorème d'Euclide sur les nombres premiers, en transformant la preuve par l'absurde vue en cours en une preuve par récurrence de : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins n nombres premiers.

Exercice 12 : On considère la suite récurrente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et

$$a_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n + 1$$

Montrer que $a_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 : Voici un raisonnement (par récurrence) dont la conclusion est que " *toutes les vaches sont de la même couleur*". Comme le nombre de vaches dans le monde est assurément fini, on va en fait montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$ $(n \geq 1)$: " *Pour tout entier strictement positif n et pour tout groupe de n vaches, toutes les vaches de ce groupe sont de la même couleur*". Voici cette " preuve" :

Initialisation : Pour $n = 1$, toutes les vaches d'un groupe composé d'une seule vache ont certainement la même couleur puisqu'une vache a la même couleur qu'elle-même...

Hérédité : Hypothèse de récurrence : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq 1$ fixé et on considère un groupe de $n+1$ vaches. On les range l'une derrière l'autre. Par hypothèse de récurrence, les n premières sont toutes de la même couleur et la dernière est aussi de cette couleur (par exemple en tant que membre des n dernières), ce qui montre bien que les n+1 vaches sont de la même couleur.

Quelle erreur a-t-on commise dans ce raisonnement ?

Exercice 14 : Soit $P(n)$ une propriété définie sur $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

- $P(1)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (P(n) \Rightarrow P(2n))$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (P(n+1) \Rightarrow P(n))$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)$.

Applications :

- Montrer que si une application $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle réel) vérifie la condition suivante pour $n = 2$, alors elle la vérifie pour tout entier $n \geq 2$:

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in I \quad f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

- En déduire l'inégalité arithmético-géométrique (pour tout entier $n \geq 2$) :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

sachant qu'elle est vraie pour $n = 2$.

Exercice 15 : Représenter par des diagrammes de Venn les 16 connecteurs binaires de l'exercice 4.

Exercice 16 : En justifiant la réponse (éventuellement par un diagramme d'Euler-Venn), juger de la validité des syllogismes suivants :

1. Aucune citrouille n'est rouge.

   Tous les fruits sont rouges.

   Donc certains fruits ne sont pas des citrouilles.
2. Seules les citrouilles sont orange.

   Certains fruits ne sont pas orange.

   Donc certains fruits ne sont pas des citrouilles.
3. Seuls les jugements désintéressés sont des jugements libres.

   Tout jugement rationnel est un jugement libre.

   Donc certains jugements rationnels sont désintéressés.
4. Qui est déchu de ses droits civiques n'est pas éligible.

   Certains criminels ne sont pas déchus de leurs droits civiques.

   Donc certains criminels sont éligibles.
5. Seuls les actes explicitement interdits par la loi sont répréhensibles.

   Certains détournements d'argent ne sont pas explicitement interdits par la loi.

   Donc certains détournements d'argent ne sont pas répréhensibles.

Exercice 17 : (Extrait de l'examen de novembre 2017)

1. Montrer que modulo 7, un carré parfait ne peut être congru qu'à 0, 1, 2 ou 4.
2. En déduire que si trois entiers x, y, z vérifient $x^2 + y^2 = 7z^2$, alors ils sont tous les trois divisibles par 7.
3. En raisonnant *par descente infinie* (méthode imposée), en déduire qu'il n'existe aucun triplet d'entiers naturels $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que $x^2 + y^2 = 7z^2$.

Exercice 18 : Soient E un ensemble et χ l'application de $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) dans $\{0,1\}^E$ (l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$) qui à chaque partie A de E associe sa fonction indicatrice :

$$\begin{array}{rcl} \chi_A : E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Montrer *par analyse-synthèse* que l'application

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

est bijective.