L3 ESR 2018-19, S6

UE option Graphes

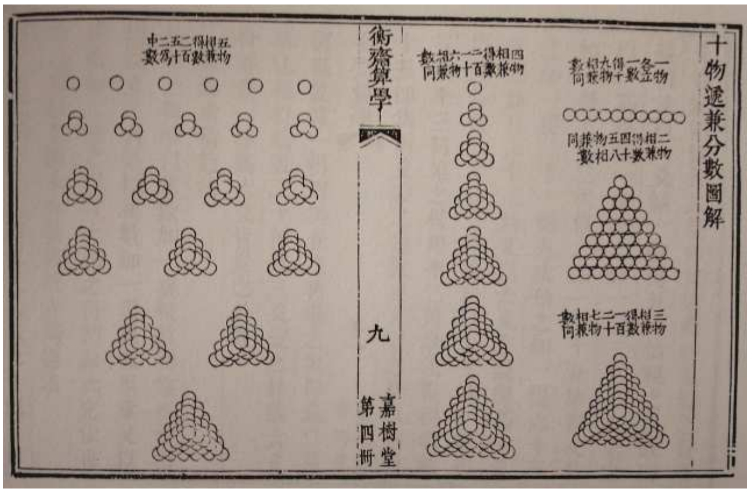
Notes de cours

Partie 1 : Combinatoire

Etienne Fieux

18 février 2019

Partie 1 : combinatoire élémentaire



Calculs de combinaisons, Wang-Lai (1768-1813)

Chapitre I

Dénombrements

RAPPELS ET NOTATIONS :

Si X est un ensemble, on notera $|X|$ son `cardinal` et $\mathscr{P}(X)$ ou 2^X, l'ensemble des `parties` (ou `sous-ensembles`) de X. Si Y est un autre ensemble, on note Y^X, l'ensemble des `applications` de X dans Y.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des ensembles, tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ est appelé n-`uplet`.

Une application $f : X \to Y$ est dite `injective` si, pour tous $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.

Une application $f : X \to Y$ est dite `surjective` si $f(X) = Y$ (dit autrement : si tout y de Y admet un antécédent dans X).

Une application $f : X \to Y$ est dite `bijective` si elle est injective et surjective.

Si n et m sont des entiers avec $n \leqslant m$, on note $[\![n, m]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $n \leqslant k \leqslant m$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[n]$ désigne l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des entiers allant de 1 à n et $[n]^+$ désigne l'ensemble $[\![0, n]\!]$ des entiers allant de 0 à n.

I.1 Ensembles et applications

Dans tout ce qui suit on se donne un ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de cardinal k et un ensemble Y de cardinal n avec $k, n \in \mathbb{N}$.

Proposition I.1. *Pour tous les sous-ensembles non vides X et Y, $\left|Y^X\right| = |Y|^{|X|}$.*

PREUVE : Se donner une application $f : X \to Y$ équivaut à se donner (de manière indépendante) k valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ et il y a n choix possibles pour chacune de ces valeurs ; il y a donc $n^k = |Y|^{|X|}$ choix posibles. □

Corollaire I.2. $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$

PREUVE : Pour toute partie A de X, on définit $\chi_A : X \to \{0,1\}$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Xi & : & \mathscr{P}(X) & \longrightarrow & \{0,1\}^X \\ & & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

est une bijection :

injectivité : Soient $A, B \subset X$. Si $\chi_A = \chi_B$, alors $A = B$ car $x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$.

surjectivité Soit $\varphi : X \to \{0,1\}$. Il est clair que $\varphi = \Xi(A) = \chi_A$ avec $A := \{x,\ x \in X \text{ et } \varphi(x) = 1\}$.

Ainsi, $|\mathscr{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right|$ qui est égal à $|\{0,1\}|^{|X|}$ d'après la Proposition I.1, soit encore à $2^{|X|}$. □

Remarque I.3. *Pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, χ_A est l'`application caractéristique` de A. La bijection entre $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ « justifie » la notaion 2^X pour $\mathscr{P}(X)$. Par ailleurs, selon cette bijection, pour une numérotation fixée $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de X, chaque partie de X est codée par un k-uplet $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k)$ dont chaque entrée est un 0 ou un 1. Par exemple, $(0,0,1,0,1,1,1,0,0,1)$ désigne le sous-ensemble $\{x_3, x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$.*

Rappelons que $|X| = k$ et $|Y| = n$. Nous noterons $\mathrm{INJ}(X,Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y.

Proposition I.4. *i) Si $k > n$, $\mathrm{INJ}(X,Y) = \varnothing$.*

ii) Si $k \leqslant n$, $|\mathrm{INJ}(X,Y)| = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

PREUVE : *i*) Par définition de l'injectivité, si $f : X \to Y$ est injective, les k éléments $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ de Y sont deux à deux distincts. Cela implique que $|Y| \geqslant k$. Dit autrement, si $n = |Y| < |X| = k$, alors $\mathrm{INJ}(X,Y) = \varnothing$.

ii) Se donner une application injective $f : X \to Y$ équivaut à se donner k valeurs $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ deux à deux distinctes. Il y a n choix possibles pour x_1, puis $n-1$ choix possibles pour x_2. Une fois choisis $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_i)$, il reste $n-i$ choix possibles pour $f(x_{i+1})$. Ainsi, en faisant ce raisonnement jusqu'à $f(x_k)$ on obtient bien qu'il existe $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ choix possibles. □

On a $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et ce nombre sera noté A_n^k

Définition I.5. *Le nombre*

$$A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}$$

est appelé `nombre d'arrangements de` k `objets parmi` n *ou* `nombre de choix de` k `objets ordonnés pris parmi` n `objets`.

Remarque I.6. *Un arrangement de k objets dans un ensemble Y de n objets peut être vu comme l'image d'une application injective de $[k] = [\![1,k]\!]$ dans Y, soit encore comme une suite ordonnée y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k} d'éléments de Y formée d'éléments deux à deux distincts.*

Exemples I.1.
1. *Le nombre de tiercés dans l'ordre possibles dans une course de 20 chevaux est* $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 18 \times 19 \times 20 = 1140 = 6840$.
2. *Si Y est un alphabet de n lettres, A_n^k est le nombre de mots de k lettres sans répétition d'une même lettre existants dans l'alphabet Y. Si $Y = \{A,B,C,D,E\}$, il y a* $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = 4 \times 5 = 20$ *mots de 2 lettres sans répétition de la même lettre :*

$$AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE, ED$$

Corollaire I.7. *i) Si $k \neq n$, $\mathrm{BIJ}(X,Y) = \varnothing$.*

ii) Si $k = n$, $|\mathrm{BIJ}(X,Y)| = n!$

PREUVE : *i*) Par définition de l'injectivité, si $f : X \to Y$ est injective, alors $|Y| \geqslant |X|$ et, par définition de la surjectivité, si f est surjective, on a $|Y| = |f(X)|$, d'où $|Y| \leqslant |X|$ car $|f(X)| \leqslant X$ pour toute application définie sur X. Ainsi, si $\mathrm{BIJ}(X,Y) \neq \varnothing$, alors $|X| = |Y|$.

ii) Si $|X| = |Y|$, une application $f : X \to Y$ est bijective si, et seulement si, elle est injective et on sait d'après la Proposition I.4 qu'il y en a $A_n^k = A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$. □

Une bijection de l'ensemble Y dans lui-même est appelée `permutation` des éléments de Y et lorsque $Y = [n] = [\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$, l'ensemble des permutaions de $[n]$ est noté $\mathcal{S}_n$.

Corollaire I.8. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, $|\mathcal{S}_n| = n!$*

I.2 Coefficients binoniaux

Proposition I.9. *Soit Y un ensemble de cardinal n. Pour tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,*

$$|\mathscr{P}_k(Y)| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

où $\mathscr{P}_k(Y)$ est l'ensemble des parties de Y de cardinal k.

Preuve : Toute partie $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}\}$ de Y de cardinal k est l'image de $[k]$ par une application injective $f : [k] \to Y$ (qui envoie j sur y_{i_j} pour tout $j \in [k]$). Dit autrement, on a une application surjective :

$$\begin{array}{rcccl} G & : & \mathrm{INJ}([k], Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_k(Y) \\ & & f : & \longmapsto & f([k]) \end{array}$$

On en déduit que $\mathscr{P}_k(X)$ est en bijection avec $\mathrm{INJ}([k], Y)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $f \sim f' \iff G(f) = G(f')$ pour tous $f, f' \in \mathrm{INJ}([k], Y)$. Mais on note que

$$G(f) = G(f') \iff \{f(1), f(2), \ldots, f(k)\} = \{f'(1), f'(2), \ldots, f'(k)\} \iff \exists \sigma \in \mathcal{S}_k \text{ tel que } \forall i \in [k], f'(i) = f(\sigma(i))$$

Ainsi, la classe d'équivalence de $f \in \mathrm{INJ}([k], Y)$ pour $\sim$ est $\{f \circ \sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}_k\}$, ce qui signifie que chaque classe d'équivalence est de cardinal $k!$ et donc que $|\mathscr{P}_k(Y)| = |\mathrm{INJ}([k], Y)/\sim| = |\mathrm{INJ}([k], Y)|/k!$, soit encore, d'après la Proposition I.4, $|\mathscr{P}_k(Y)| = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. □

Définition I.10. *Pour $n \geqslant 0$ et $k \in [n]^+$, les nombres*

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

sont appelés ***coefficients binomiaux*** *ou* ***nombre de combinaisons de k objets parmi n*** *ou encore* ***nombre de choix non ordonnés de k objets pris parmi n objets****.*

Ce nombre sera le plus souvent noté $\binom{n}{k}$. On a donc

$$C_n^k := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Remarque I.11. *Une combinaison de k objets dans un ensemble Y de n objets n'est rien d'autre que la donnée d'un sous-ensemble de Y de cardinal k.*

Exemples I.2. *1. Le nombre de tiercés dans le désordre possibles dans une course de 20 chevaux est*

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{18 \times 19 \times 20}{2 \times 3} = 3 \times 19 \times 20 = 1140$$

2. Le nombre de tirages possibles de 6 numéros dans un loto de 49 numéros est

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 22 \times 3 \times 46 \times 47 \times 2 \times 49 = 13\,983\,816$$

Propriétés I.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [n]^+ = [\![0, n]\!]$.*

i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

ii) Si $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

iii) $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

iv) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

v) ***(égalité de Pascal)*** $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

vi) Si $n \geqslant 1$, $\displaystyle n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$, *soit encore* $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Preuve : *i*) Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de $[n]$ de cardinal k (d'après la Proposition I.9) et que toute partie de $[n]$ est de cardinal j avec $0 \leqslant j \leqslant n$, la somme $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$ compte tout simplement le nombre de parties de $[n]$ qui vaut 2^n d'après le Corollaire I.2.

ii) De la même façon,

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \sum_{j=0,j \text{ pair}}^{n}\binom{n}{j} - \sum_{j=0,j \text{ impair}}^{n}\binom{n}{j}$$

et démontrer l'égalité $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = 0$ équivaut à démontrer que tout ensemble fini contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Soit donc Y de cardinal n, $\mathscr{P}_{pair}(Y)$ (resp. $\mathscr{P}_{impair}(Y)$) l'ensemble des parties de Y de cardinal pair (resp. de cardinal impair). Pour montrer que $|\mathscr{P}_{pair}(Y)| = |\mathscr{P}_{impair}(Y)|$, considérons un élément y_0 de Y (possible car on a supposé $n \geqslant 1$, i.e. Y non vide) et l'application

$$\begin{array}{rcccl} \Pi & : & \mathscr{P}_{pair}(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{impair}(Y) \\ & & A & \longmapsto & \Pi(A) = \begin{cases} A \cup \{y_0\} \text{ si } y_0 \notin A \\ A\backslash\{y_0\} \text{ si } y_0 \in A \end{cases} \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que Π est une bijection. On note d'abord que Π est bien définie car si $A \in \mathscr{P}_{pair}(Y)$, alors $\Pi(A) \in \mathscr{P}_i(Y)$ puisque $|\Pi(A)| = |A| \pm 1$. On note également que pour tout $A \in \mathscr{P}_p(Y)$, $y_0 \in A \Longleftrightarrow y_0 \notin \Pi(A)$. De plus :

injectivité : Soient $A, A' \in \mathscr{P}_{pair}(Y)$. Si $\Pi(A) = \Pi(A')$, alors

- soit $y_0 \in A$, auquel cas $A\backslash\{y_0\} = \Pi(A) = \Pi(A')$ et y_0 est également dans A' (car, par définition de Π, $\Pi(A') = A'\backslash\{y_0\}$ implique $y_0 \notin \Pi(A')$ et donc $y_0 \in A'$), d'où finalement $A = \Pi(A) \cup \{y_0\} = \Pi(A') \cup \{y_0\} = A'$.
- soit $y_0 \notin A$, auquel cas $A \cup \{y_0\} = \Pi(A) = \Pi(A')$ et y_0 n'est pas non plus dans A' (car, par définition de Π, $\Pi(A') = A' \cup \{y_0\}$ implique $y_0 \in \Pi(A')$ et donc $y_0 \notin A'$), d'où finalement $A = \Pi(A)\backslash\{y_0\} = \Pi(A')\backslash\{y_0\} = A'$.

surjectivité : Soit $B \in \mathscr{P}_{impair}(Y)$. Si $y_0 \in B$, alors $B = \Pi(B\backslash\{y_0\})$ et si $y_0 \notin B$, alors $B = \Pi(B \cup \{y_0\})$.

En conclusion, Π est une bijection et $|\mathscr{P}_{pair}(Y)| = |\mathscr{P}_{impair}(Y)|$.

iii) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ car un ensemble de cardinal n ne possède qu'une seule partie de cardinal 0 (l'ensemble vide) et qu'une seule partie de cardinal n (lui-même).

Pour les propriétés *iv*) à *vi*), on va développer une preuve « combinatoire » (on laisse au lecteur la vérification directe par le calcul).

iv) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: $\binom{n}{k}$ est le nombre de sélection de k objets parmi n. Mais sélectionner k objets parmi n équivaut à en sélectionner $n-k$ (ceux qu'on ne prend pas...), d'où l'égalité demandée. Plus formellement, si Y est de cardinal n, on a $\binom{n}{k} = |\mathscr{P}_k(Y)|$, $\binom{n}{n-k} = |\mathscr{P}_{n-k}(Y)|$ et l'égalité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ résulte de la bijection (évidente car la réciproque est définie par la même formule) :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_k(Y) & \longrightarrow & \mathscr{P}_{n-k}(Y) \\ A & \longmapsto & \overline{A} = Y\backslash A \end{array}$$

v) On peut voir l'identité de Pascal $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ comme le résultat d'un **double comptage**. Cela veut dire que l'on fait apparaître les deux côtés de l'égalité comme le comptage d'une certaine quantité par deux méthodes distinctes. Ici, on prend Y un ensemble de cardinal $n+1$, on choisit un y_0 dans Y, et on compte les parties de Y qui sont de cardinal k :

1er comptage : $\binom{n+1}{k} = |\mathscr{P}(Y)|$ est le nombre de parties de Y de cardinal k.

2d comptage : une partie de Y de cardinal k contient y_0 ou ne contient pas y_0 (dichotomie)... Or, il y a $\binom{n}{k-1}$ parties de Y de cardinal k qui contiennent y_0 (une fois y_0 choisi, il reste $\binom{n}{k-1}$ choix possibles) et il y a $\binom{n}{k}$ parties de Y de cardinal k qui ne contiennent pas y_0 (y_0 est exclu et il reste $\binom{n}{k}$ choix possibles).

vi) Ici également, on va rendre compte de l'égalité $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$ comme résultat d'un double comptage :

1er comptage $n\binom{n-1}{k-1}$ est le nombre de parties de Y (qui est de cardinal $n \geqslant 1$) de cardinal k et obtenues en sélectionnant d'abord un y dans Y, puis en complétant par $k-1$ éléments pris $Y\backslash\{y\}$.

2d comptage Dans le précédent comptage, toute partie B de Y de cardinal k est comptée k fois (suivant le premier élément qui a d'abord été compté) ; puisqu'il y a $\binom{n}{k}$ partie des carinal k, cela veut dire qu'on a dénombré $k\binom{n}{k}$ parties.

□

Le résultat bien connu qui suit justifie l'appellation de *coefficient binomial* :

Théorème I.13 (Formule du binôme)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Preuve :

preuve 1 Lorsqu'on développe

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ fois le facteur } (x+y)}$$

on obtient une somme de 2^n termes de la forme $x^k y^{n-k}$ correspondant aux 2^n choix possibles (qui résultent du choix de x ou de y à l'intérieur de chaque facteur $x+y$). Pour k allant de 0 à n, on obtient $x^k y^{n-k}$ pour tout choix de k facteur $x+y$ (qui sont ceux dans lesquels on sélectionne x) et il y a bien $\binom{n}{k}$ tels choix possibles.

preuve 2 Démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0$, $(x+y)^n = (x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \times 1 \times 1$: la formule est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité On se donne un entier $n \geqslant 0$ pour lequel on a (HR) : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. On a alors

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&\overset{(HR)}{=} (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^{n-(j-1)}y^j \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k
\end{aligned}$$

□

I.3 Partages

Combien existe-t-il de manières de distribuer les 4 parts (indivisibles !) d'un gâteau à 3 enfants ? Si a_i est le nombre de parts reçues par l'enfant i, on cherche donc le nombre de triplets d'entiers positifs (au sens large) (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 + a_2 + a_3 = 4$. En voici la liste :

$(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$
$(3,1,0)$, $(1,3,0)$, $(3,0,1)$, $(1,0,3)$, $(0,3,1)$, $(0,1,3)$
$(2,2,0)$, $(2,0,2)$, $(0,2,2)$
$(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$

Il en existe donc 15. Notons que si on impose aux a_i d'être strictement positifs (on veut que chaque enfant ait au moins une part de gâteau), il ne reste plus que 3 triplets.

Théorème I.14.

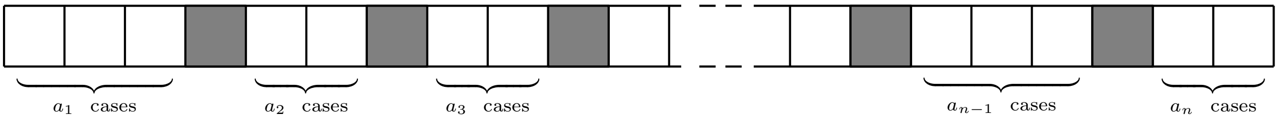
i) Il y a $\binom{n+k-1}{n-1}$ *n-uplets* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *formés d'entiers vérifiant* $\left\{\begin{array}{l} a_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \end{array}\right.$

ii) Il y a $\binom{k-1}{n-1}$ *n-uplets* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *formés d'entiers vérifiant* $\left\{\begin{array}{l} a_i > 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k \end{array}\right.$

Preuve : i) Imaginons que l'on a un ensemble de boules de n couleurs différentes (avec au moins k boules de chaque couleur). Les différents n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ correspondent aux différentes manières de réunir k boules en notant a_i le nombre de boules de la couleur i pour tout i de $[n]$.

Pour un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ fixé, on va ranger ces k boules dans un alignement de cases, chacune contenant une boule.

On met les a_1 boules de couleur 1 dans les a_1 premières cases, puis on « bouche » la case suivante. Et on recommence le même processus avec la couleur 2 : mettre les a_2 boules de couleur 2 dans les a_2 cases suivantes et « boucher » la case qui suit ; on procède ainsi jusqu'à la couleur $(n-1)$ après quoi on termine en remplissant a_n cases avec les a_n boules de couleur n.



On note que les a_i peuvent être nuls (cela se traduit par la première case bouchée si $a_1 = 0$, par la dernière case bouchée si $a_n = 0$ et par deux cases bouchées côte-à-côte dans les autres cas). On a ainsi une répartition de $(n-1)$ cases bouchées parmi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n - 1 = k + n - 1$ cases. Il est clair que deux k-uplets distincts $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ et $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = k$ donnent lieu à des répartitions distinctes (les séparateurs - i.e. les cases bouchées - ne sont pas placés au même endroit). Réciproquement un choix de $n-1$ cases bouchées parmi $k+n-1$ donne un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ (a_1 est le nombre de cases avant la première case bouchée, puis a_i est le nombre de cases entre la $(i-1)$-ème et la i-ème cases bouchées pour $2 \leqslant i < n$ et a_n est le nombre de cases après la dernière case bouchée).

Ainsi, il y a autant de n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ que de choix de $(n-1)$ cases parmi $(k+n-1)$, soit $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$.

ii) Ce calcul se déduit du précédent. En effet, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \Longleftrightarrow (a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_n - 1) \in \mathbb{N}^n$ et le nombre cherché (en posant $a'_i = a_i - 1$) est donc le nombre de n-uplets $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ formés d'entiers vérifiant $\begin{cases} a'_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n = k - n \end{cases}$ qui est égal $\binom{(k-n)+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$ d'après *i)*.
□

Remarques I.15.

1. Les n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ formés d'entiers strictement positif vérifiant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ seront appelés ***n-décompositions de*** *k. Si on note $c_n(k)$ le nombre de n-décompositions de k, on a donc $c_n(k) = \binom{k-1}{n-1}$.*

2. On note que la valeur $\binom{k-1}{n-1}$ impose que $k \geqslant n$, ce qui est concordant avec le fait qu'il ne peut pas exister de n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ si $n > k$.

Exemple I.1. *Si l'on revient à l'exemple traité ci-dessus où $k = 4$ et $n = 3$, on trouve bien $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6}{2} = 15$ et $\binom{n-1}{k-1} = \binom{3}{2} = 3$.*

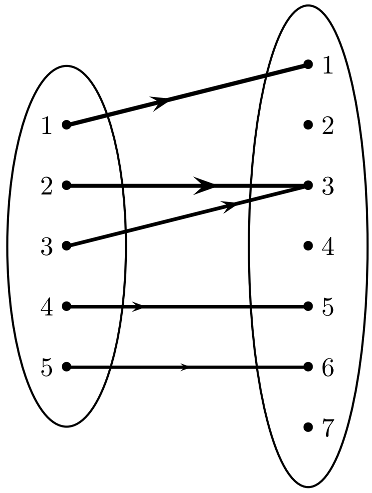
Proposition I.16. *Soient k, n des entiers strictement positifs.*

i) Le nombre d'applications $f : [k] \to [n]$ croissantes au sens large (i.e. $i \leqslant j \Rightarrow f(i) \leqslant f(j)$) est $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$.

ii) Si $k \leqslant n$, le nombre d'applications $f : [k] \to [n]$ strictement croissantes (i.e. $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$) est $\binom{n}{k}$.

Preuve : Voici un cas particulier ($k = 5$, $n = 7$) pour illustrer les deux preuves que l'on va voir :

$\varphi : [5] \to [7]$:



preuve 1 Cette preuve utilise le fait toute application croissante $f : [k] \to [n]$ est entièrement déterminée par la suite des cardinaux des images réciproques $f^{-1}(\{j\})$, $j \in [n]$. Pour l'exemple φ, cette suite est $(1, 0, 2, 0, 1, 1, 0)$. Il suffit donc de montrer que l'application qui suit est bijective :

$$\begin{array}{rcrcl} H & : & \{f : [k] \to [n],\ f \text{ croissante au sens large}\} & \longrightarrow & \{(a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{N}^n,\ a_1 + \ldots + a_n = k\} \\ & & f & \longmapsto & \big(\big|f^{-1}(\{1\})\big|, \big|f^{-1}(\{2\})\big|, \ldots, \big|f^{-1}(\{n\})\big|\big) \end{array}$$

On note que si $f : [k] \to [n]$ est croisssante et $x \in [k]$, alors $f(x) = i \iff x = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a$ avec $1 \leqslant a \leqslant a_i$ et $a_j = \big|f^{-1}(\{j\})\big|$ pour tout $j \in [n]$. On définit donc

$$\begin{array}{rcrcl} K & : & \{(a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbb{N}^n,\ a_1 + \ldots + a_n = k\} & \longrightarrow & \{f : [k] \to [n],\ f \text{ croissante au sens large}\} \\ & & \alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \longmapsto & K(\alpha) \end{array}$$

où $K(\alpha)$ est défini, pour tout $j \in [n]$, par

$$\begin{cases} K(\alpha)^{-1}(\{1\}) = [\![1, a_1]\!] \text{ si } a_1 \geqslant 1 \text{ et } K(\alpha)^{-1}(\{1\}) = \varnothing \text{ sinon} \\ K(\alpha)^{-1}(\{i\}) = [\![a_1 + \ldots + a_{i-1} + 1, a_1 + \ldots + a_i]\!] \text{ si } a_i \geqslant 1 \text{ et } K(\alpha)^{-1}(\{i\}) = \varnothing \text{ sinon} \end{cases}$$

Vérifions que $K = H^{-1}$.

- Si $f : [k] \to [n]$ est croissante au sens large, alors pour tout $j \in [n]$:

$$\begin{array}{rcl} x \in K(H(f))^{-1}(\{j\}) & \iff & \big|f^{-1}(\{1\})\big| + \ldots + \big|f^{-1}(\{j-1\})\big| < x \leqslant \big|f^{-1}(\{1\})\big| + \ldots + \big|f^{-1}(\{j\})\big| \\ & \iff & x \in f^{-1}(\{j\}) \end{array}$$

•• Si $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $a_1 + \ldots + a_n = k$, alors $H(K(\alpha)) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ avec pour tout $j \in [n]$:

$$b_j = \big|K(\alpha)^{-1}(\{j\})\big| = (a_1 + \ldots + a_j) - (a_1 + \ldots + a_{j-1} = a_j$$

Ainsi, K est bijective et on peut donc conclure que le nombre d'applications croissantes au sens large de $[k]$ vers $[n]$ est égal au nombre de n-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme k. D'après le Théorème I.14, ce nombre est $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

preuve 2 Pour cette autre approche, on va considérer les « sauts »(éventuellement nuls) de $f(i)$ à $f(i+1)$ pour tout $f : [k] \to [n]$ croissante. En ajoutant les valeurs $f(0) = 1$ et $f(k+1) = n$, on obtient une suite de $k+1$ entiers positifs ou nuls :

$$f(1) - f(0), f(2) - f(1), \ldots, f(k) - f(k-1), f(k+1) - f(k)$$

et on note que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} (f(j) - f(j-1)) = f(k+1) - f(0) = k - 1$. Par exemple, pour l'application φ donnée en exemple, on obtient $(0, 2, 0, 2, 1, 1)$. Montrons que l'application qui suit est bijective :

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \{f:[k]\to[n],\ f \text{ croissante au sens large}\} & \longrightarrow & \{(b_1,\ldots,b_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1},\ b_1+\ldots+b_{k+1}=n-1\} \\ & & f & \longmapsto & \beta=(b_1,\ldots,b_{k+1}) \\ & & & & \text{avec} \begin{cases} b_i=f(i)-f(i-1),\ i\in[k+1] \\ f(0):=1,\ f(k+1):=n \end{cases} \end{array}$$

Injectivité de H. Si $f,g:[k]\to[n]$ sont deux applications croissantes, alors $H(f)=H(g)$ implique $f(i)-f(i-1)=g(i)-g(i-1)$ pour tout i de $[k+1]$ avec $f(0)=g(0)$ et $f(k+1)=g(k+1)$. De $f(1)-f(0)=g(1)-g(0)$ et $f(0)=g(0)$, on déduit $f(1)=g(1)$. Puis de $f(2)-f(1)=g(2)-g(1)$ et $f(1)=g(1)$, on déduit $f(2)=g(2)$. Et ainsi de suite..., par une récurrence évidente, on obtient $g(i)=f(i)$ pour tout i de $[k]$ et $f=g$.

Surjectivité de H. Soit $\beta=(b_1,\ldots,b_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1}$ tel que $b_1+\ldots+b_{k+1}=n-1$. Alors, $\beta=H(f)$ avec $f:[k]\to[n]$ croissante définie par $f(i)=1+b_1+\ldots+b_i$ pour tout i de $[k]$ puisque

• $f(i)-f(i-1)=b_i$ pour $i\in[\![2,k]\!]$

•• avec $f(0):=1$, on obtient $f(1)-f(0)=1+b_1-1=b_1$

••• et avec $f(k+1)=n$, on obtient $f(k+1)-f(k)=n-(1+b_1+\ldots+b_k)=b_{k+1}$ puisque $b_1+\ldots+b_k+b_{k+1}=n-1$

L'application H étant bijective, le nombre cherché est égal au nombre de $(k+1)$-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme $n-1$. D'après le Théorème I.14, ce nombre est $\binom{(k+1)+(n-1)-1}{k}=\binom{k+n-1}{k}$.

ii) Cette question est beaucoup plus facile. En effet, se donner une application strictement croissante f de $[k]$ dans $[n]$ équivaut à se donner une suite strictement croissante de k valeurs $f(i)$:

$$1\leqslant f(1)<f(2)<f(3)<\ldots<f(k-1)<f(k)\leqslant n$$

ce qui équivaut encore à se donner un sous-ensemble $\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$ de $[n]$ de cardinal k que l'on écrit en ordonnant ses éléments : $b_1<b_2<\ldots<b_k$ (un tel sous-ensemble définit ainsi une unique application strictement croissante en posant $b_i=f(i)$). Ainsi, il y a autant d'applications strictement croissantes de $[k]$ dans $[n]$ que de parties de $[n]$ de cardinal k, soit $\binom{n}{k}$ (d'après la Proposition I.9). □

I.4 Coefficients multinomiaux

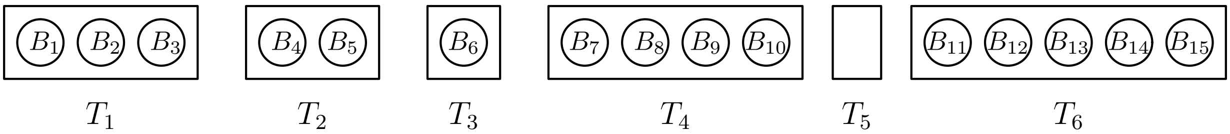
Les quinze boules

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

sont tombées dans les six trous du billard. Les numéros des boules ont été cachés, on sait seulement qu'il y a 3 boules dans le trou T_1, 2 boules dans T_2, 1 boule dans T_3, 4 boules dans T_4, aucune boule dans T_5 et 5 boules dans T_6. Quelle est le nombre de répartitions des boules vérifiant ces conditions ? Pour répondre à cette question, on peut dire qu'il y a 15 ! manières d'ordonner les boules :

B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10} B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15}

et que chacune de ces distributions donne lieu à la répartition suivante



En procédant ainsi, la répartition $\{B_1, B_2, B_3\}$ dans T_1 sera comptée $3\,!{=}6$ fois, la répartition $\{B_4, B_5\}$ dans T_2 sera comptée 2 fois, la répartition $\{B_7, B_8, B_9, B_{10}\}$ dans T_4 sera comptée $4\,!{=}24$ fois et la répartition $\{B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}\}$ dans T_6 sera comptée $5\,!{=}120$ fois. Finalement le nombre de répartitions cherché est égal à

$$\frac{15!}{3!\,2!\,4!\,5!}$$

On notera que ce nombre s'écrit encore $\dfrac{15!}{3!\,2!\,1!\,4!\,0!\,5!}$ et qu'il correspond au nombre de répartitions ordonnées $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ en appelant X_i l'ensemble des boules tombées dans T_i. De façon plus générale, si X est un ensemble fini, on appellera *k-répartition ordonnée* de X tout k-uplet $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \big(\mathscr{P}(X)\big)^k$ tel que

- $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$
- $\forall (i,j) \in [k]^2,\ i \neq j \implies X_i \cap X_j = \varnothing$

En suivant le raisonnement qu'on vient d'utiliser et en notant n le cardinal de X, on voit que

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$$

est le nombre de k-répartitions ordonnées $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ avec $|X_i| = n_i$ pour $i \in [k]$ (et, nécessairement, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

Définition I.17. *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et tout k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, le nombre*

$$\frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_k!}$$

est appelé `coefficient multinomial` *et il est noté*

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$$

Remarque I.18. *Cette définition étend bien entendu celle des coefficients binomiaux (qui correspondent au cas $k = 2$ dans la Définition I.17) et on a*

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{n-a} = \binom{n}{a, n-a}$$

Exemple I.2. *Supposons que l'on a k urnes numérotées, soit par exemple U_1, U_2, …, U_k, et que l'on veut répartir n boules dans ces k urnes, en laissant n_i boules dans l'urne U_i pour tout $i \in [k]$. On suppose également que les boules sont distinguables (par exemple, elle sont numérotées de 1 à n). Le nombre de répartitions différentes que l'on peut faire est alors*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$$

puisque la procédure de répartition des n boules peut être présentée comme un choix ordonné des n boules (il y en a $n!$) puis le rangement des n_1 premières boules dans l'urne U_1, puis les n_2 boules suivantes dans U_2, etc... jusqu'aux n_k dernières boules qui vont dans U_k. Pour chaque urne U_i, il y a alors clairement $n_i!$ tels choix ordonnés qui donnent le même ensemble de boules dans l'urne U_i (d'où la division par $n_i!$ pour tout i).

Les coefficients multinomiaux peuvent être vus comme un produit de coefficients binomiaux :

Proposition I.19. *Pour tout* $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ *et tout* k*-uplet* $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ *tel que* $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$*,*

$$\begin{aligned}\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} &= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}} \\ &= \binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}}\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}-a_{k-1}}{a_k}\end{aligned}$$

Preuve : La seconde égalité est évidente puisque $n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}-a_{k-1} = a_k$. Le calcul direct donne la première égalité.

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-3}}{a_{k-2}}\binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2}}{a_{k-1}}$$

$$= \frac{n!}{a_1!\,\cancel{(n-a_1)!}}\ \frac{\cancel{(n-a_1)!}}{a_2!\,\cancel{(n-a_1-a_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-3})!}}{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2})!}\,a_{k-2}!}\ \frac{\cancel{(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-2})!}}{a_{k-1}!\,a_k!}$$

Remarque I.20. *En suivant la Proposition I.19, le coefficient multinomial* $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ *est le nombre de choix de* n *objets,* a_1 *du type 1,* a_2 *du type 2, …,* a_k *du type* k*.*

Par exemple, c'est le nombre d'anagrammes d'un mot de n *lettres formé à partir de* k *lettres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *avec* a_i *fois la lettre* α_i*. Ainsi le nombre d'anagrammes du mot AMPEREMETRE est* $\binom{11}{1,2,1,4,2,1} = \frac{11!}{2!\,4!\,2!} = 5\times 6\times 7\times 2\times 9\times 10\times 11 = 415800$.

De la même façon, le calcul de l'Exemple I.2 peut être présenté comme celui du choix de n_1 *boules parmi* n *(qu'on dépose dans l'urne* U_1*), puis du choix de* n_2 *boules parmi* $n-n_1$ *(qu'on dépose dans l'urne* U_2*), puis du choix de* n_3 *boules parmi* $n-n_1-n_2$ *(qu'on dépose dans l'urne* U_3*), etc...*

Théorème I.21 (Formule du binôme)**.** *Pour tout* $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ *et tout* k*-uplet* $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ *tel que* $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$*,*

$$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k, \quad (x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k)\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_k=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$$

Preuve :

preuve 1 Lorsqu'on développe

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)(x_1+x_2+\ldots+x_k)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_k)}_{n \text{ fois le facteur } (x_1+x_2+\ldots+x_k)}$$

on obtient une somme de k^n monômes de la forme $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$ avec $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$ et correspondant aux k^n choix possibles (qui résultent du choix d'un x_i à l'intérieur de chaque facteur $x_1+x_2+\ldots+x_k$). Pour un k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $a_1+a_2+\ldots+a_k = n$ fixé, le coefficient du monôme $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$ est donné par le nombre de n-uplets $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ où $u_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ pour tout i de $[n]$ et tels que x_i apparaît a_i fois pour tout i de $[n]$. Cela revient à prendre a_1 fois x_1 parmi les n facteurs, puis a_2 fois x_2 parmi les $n-a_1$ facteurs restants, puis a_3 fois x_3 parmi les $n-a_1-a_2$ facteurs restants, etc... Compte tenu de la Proposition I.19, ce nombre est $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$.

preuve 2 Démonstration (pour n fixé) par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation Pour $k = 1$, il n'y a rien à montrer puisque les deux côtés de l'égalité sont identiques.

Hérédité On suppose que l'égalité à montrer est vraie pour un $k \geqslant 1$ (c'est l'hypothèse de récurrence

(HR)) et on se donne $k+1$ nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et x_{k+1}. Les égalités qui suivent montrent que la formule est alors valable au rang $k+1$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-2} + x_k + x_{k+1})^n$$

$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-2} + (x_k + x_{k+1}))^n$$

$$\overset{(HR)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_{k-1},a')\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a'=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} (x_k + x_{k+1})^{a'}$$

$$\overset{(\dagger)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_{k-1},a')\in\mathbb{N}^k \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a'=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} \sum_{a_k+a_{k+1}=a'} \binom{a'}{a_k} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k,a_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1} \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} \binom{a'}{a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

$$\overset{(\dagger\dagger)}{=} \sum_{\substack{(a_1,k_2,\ldots,a_k,a_{k+1})\in\mathbb{N}^{k+1} \\ a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=n}} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{k-1}^{a_{k-1}} x_k^{a_k} x_{k+1}^{a_{k+1}}$$

où l'égalité (†) utilise la formule du binôme (Théorème I.13) et l'égalité (††) résulte du calcul direct

$$\begin{aligned} \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a'} \binom{a'}{a_k} &= \frac{n!}{a_1!\, a_2!\, \ldots a_{k-1}!\, \cancel{a'!}} \frac{\cancel{a'!}}{a_k!\, a_{k+1}!} \\ &= \frac{n!}{a_1!\, a_2!\, \ldots a_k!\, a_{k+1}!} \\ &= \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}} \end{aligned}$$

□

I.5 Exercices

Exercice I.1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n est un carré parfait (i. e., le carré d'un entier) si, et seulement si, n admet un nombre impair de diviseurs.

Exercice I.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α_n le nombre maximal de parties de $[n]$ qui ont, deux à deux, une intersection non vide.

1. Déterminer α_2 et α_3.
2. Montrer que $\alpha_n = 2^{n-1}$.

Exercice I.3 : Soit E un ensemble de cardinal $n > 0$. Si A et B sont des sous-ensembles de E tels que $A \cup B = E$, on dira que la paire $\{A, B\} \subset \mathscr{P}(E)$ est un *recouvrement* de E et que le couple $(A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$ est un *recouvrement ordonné* de E. Le but de cet exercice est de compter le nombre de recouvrements de E.

1. Soit X un sous-ensemble de E de cardinal k.

a) On considère l'ensemble $\mathscr{E}_X$ formés des recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B = X$. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathscr{E}_X$ et $\mathscr{P}(E \backslash X)$.

b) Combien existe-t-il de recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B = X$?

2. Combien existe-t-il de recouvrements ordonnés (A, B) de E tels que $A \cap B$ soit de cardinal k ?

3. En déduire le nombre de recouvrements ordonnés de E.

4. Combien E admet-il de recouvrements ?

Exercice I.4 : 1. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB ? Et du mot MISSISSIPI ?

2. Un mot est une suite de lettres. On comptera le mot « vide » comme un mot sans lettre.

a) Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot FACULTÉ ? Et en utilisant uniquement les cinq lettres de BAZAR ?

3. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à n lettres.

a) Soit k entier avec $k \leqslant n$. Combien de mots de k lettres et sans répétition de lettre peut-on former à partir de l'alphabet $\mathcal{A}$?

b) Montrer que le nombre de mots *sans répétition de lettre* que l'on peut former avec l'alphabet $\mathcal{A}$ est égal à $E(e.n!)$ (où $E(x)$ est la partie entière de x).

Exercice I.5 : 1. Justifier que $A_n^m A_{n-m}^{p-m} = A_m^p$. On le justifiera d'abord sans faire de calculs avant de le vérifier en appliquant les formules.

2. Vérifier par le calcul les propriétés qui suivent :

i) $\binom{l}{k} = \binom{l}{l-k}$ *ii)* $\binom{l+1}{k} = \binom{l}{k-1} + \binom{l}{k}$ (identité de Pascal) *iii)* $k\binom{l}{k} = l\binom{l-1}{k-1}$

3. Prouver les égalités (avec $m \leqslant n$) :

i) $1 + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \ldots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1} + 2^n = 3^n$ *ii)* $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$

iii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ *iv)* $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$

Exercice I.6 : 1. On considère le quadrillage du plan dont $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est l'ensemble des sommets (ou croisements). Quel est le nombre de plus courts chemins du sommet $(0,0)$ au sommet (p,q) (cf. Figure 1) ?

2. En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (avec l'aide de la Figure 2).

3. Montrer que $\binom{p+q}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{p+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{q+k-1}{p}$ (avec l'aide de la Figure 3).

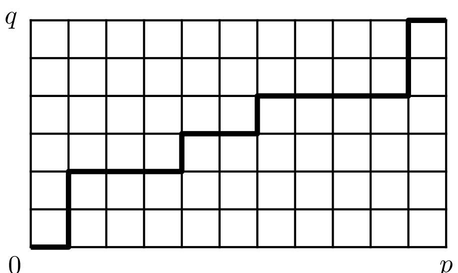


Figure 1

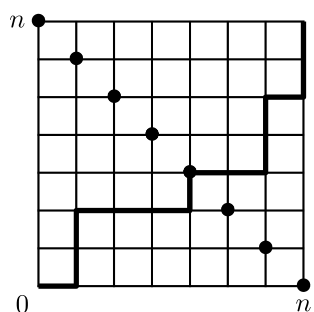


Figure 2

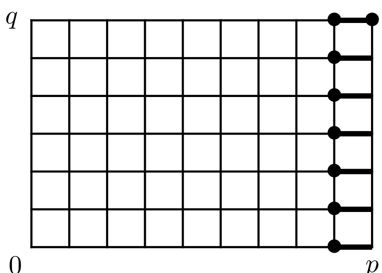
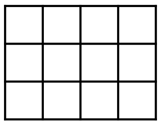
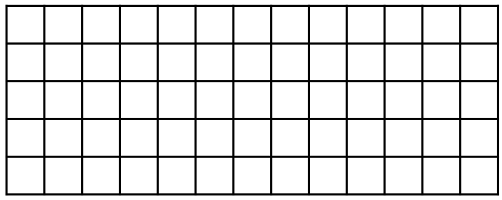


Figure 3

Exercice I.7 : 1. Calculer le nombre de rectangles (avec côtés horizontaux ou verticaux) que l'on peut voir dans chacune des figures suivantes :



rectangle 3×4



rectangle 5×13

2. Même question si on donne un rectangle $p \times q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice I.8 : 1. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro ?

2. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants (un enfant peut ne rien recevoir) ?

3. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins deux euros ?

4. De combien de manières peut on distribuer n pièces de 1 euro à k garçons et l filles de sorte que chaque fille ait au moins un euro ?

On suppose dans chaque cas que les répartitions demandées sont possibles (i.e. que n est assez grand...).

Exercice I.9 : Vrai ou Faux ? (avec $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n > k$) (justifier la réponse par une preuve si c'est vrai ou par un contre-exemple si c'est faux)

VF 1. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro est égal au nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments.

VF 1. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants de sorte que chaque enfant ait au moins un euro est égal au nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.

VF 1. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants est égal au nombre de k-uplets $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$.

VF 1. Le nombre de manières de distribuer n pièces de 1 euro à k enfants est égal au nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice I.10 : Montrer que le nombre $c(n)$ de décompositions d'un entier n (cf. Remarques I.15) est 2^{n-1}.

Exercice I.11 : Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère $X = \{1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{N}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = Y^X$, l'ensemble des applications de X dans Y. On considère également les sous-ensembles de $\mathcal{A}$:

$U = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est injective}\}$

$V = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est croissante (au sens large)}\}$

$W = \{f \in \mathcal{A}\,;\ f \text{ est strictement croissante}\}$

Reportez-vous au cours pour donner les valeurs de $|\mathcal{A}|$, $|U|$, $|V|$ et $|W|$.

2. Une urne contient n boules distinctes et on veut sélectionner k boules. Cette sélection peut se faire de quatre manières différentes (avec ou sans remise de la boule qui vient d'être tirée, en tenant compte ou non de l'ordre dans lequel les k boules ont été sélectionnées). Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le nombre de sélections possibles.

	avec ordre	sans ordre
avec remise		
sans remise		

Exercice I.12 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui est donnée à partir d'une autre suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par la formule

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} v_i$$

1. Montrer qu'on a alors $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{n-k}$ (le passage de u_n à v_n est appelé *inversion de Pascal*).
2. En déduire la formule

$$d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$$

où $d(n)$ est le nombre de dérangements (ou permutations sans point fixe) d'un ensemble à n éléments.

Chapitre II

Suites de nombres

II.1 Un exemple : les nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... sont définis par

$$(Fibo) \qquad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette définition à l'aide d'une formule de récurrence donne une formule *implicite* pour le calcul des nombres de Fibonacci. Nous allons à présent voir deux manières distinctes de trouver une formule *explicite* (ou « `formule fermée` » ou encore « `formule close` ») pour le calcul de ces nombres. Ces deux méthodes seront systématisées dans les section)s qui suivent.

Première méthode

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $z = \alpha x + \beta y$. On note que $z = (z_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{F}$ puisque pour $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} z_{n+2} = \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} = \alpha(x_{n+1} + x_n) + \beta(y_{n+1} + y_n) &= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} + \alpha x_n + \beta y_n \\ &= z_{n+1} + z_n \end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (x_0, x_1) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (la vérification de la linéarité est automatique et le fait qu'elle soit un isomorphisme traduit simplement le fait que les éléments de $\mathcal{F}$ sont des suites entièrement définies si, et seulement si, les deux premiers termes sont connus).

Cet isomorphisme traduit donc simplement le fait que $\mathcal{F}$ est constitué de suites entièrement définies par la donnée de leurs deux premiers termes. Il nous dit que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et il suffit donc de connaître deux suites linéairement indépendantes de $\mathcal{F}$ pour exprimer toutes les suites de $\mathcal{F}$ comme combinaison linéaire de ces deux suites.

On cherche alors des suites géométriques $(x_n) = (\lambda^n)$ linéairement indépendantes et qui appartiennent à $\mathcal{F}$:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \iff \lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n \iff \lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

Ainsi en posant $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, les suites géométriques $(\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta^n)_{n\geqslant 0}$ sont dans $\mathcal{F}$ et elles sont linéairement indépendantes car, pour tous scalaires $A, B \in \mathbb{C}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A\alpha_n + B\beta_n = 0 \implies \begin{cases} A + B = 0 & (n = 0) \\ A\alpha + B\beta = 0 & (n = 1) \end{cases} \implies A = B = 0$$

Ainsi, $\{(\alpha^n)_{n\geqslant 0}, (\beta^n)_{n\geqslant 0}\}$ est une base de $\mathcal{F}$. On note que $\alpha+\beta=1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ et $\alpha\beta=-1$.

Retour à la suite de Fibonacci

On cherche $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$. On doit avoir $\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A\alpha+B\beta=1 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} B=-A \\ A(\alpha-\beta)=1 \end{array}\right.$, d'où : et $A = \dfrac{1}{\alpha-\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ puis $B = -A = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. En conclusion, on a la formule explicite $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, soit encore

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Deuxième méthode

On considère la série $f(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^n$ (on ne se pose pas ici la question de la convergence, cette série est un objet algébrique très bien défini ; on reviendra sur cette question dans la section §II.3.1). On note alors que

$$Xf(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} F_{n-1} X^n$$

et

$$X^2 f(X) = \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+2} = \sum_{n\geqslant 2} F_{n-2} X^n$$

La relation $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ nous donne (en tenant compte de $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$) :

$$\begin{aligned} Xf(X) + X^2 f(X) &= \sum_{n\geqslant 1} F_{n-1}X^n + \sum_{n\geqslant 2} F_{n-2}X^n \\ &= F_0 X + \sum_{n\geqslant 2}(F_{n-1}+F_{n-2})X^n \\ &= F_0 X + \sum_{n\geqslant 2} F_n X^n \\ &= F_0 X - F_0 - F_1 X + \sum_{n\geqslant 0} F_n X^n \\ &= -X + f(X) \end{aligned}$$

soit encore $f(X) = Xf(X) + X^2 f(X) + X$ ou

$$f(X) = \frac{X}{1-X-X^2}$$

Rappelons que racines $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ de $X^2 - X - 1$ vérifient $\alpha+\beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$, si bien que $1 - X - X^2 = 1 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta X^2 = (1-\alpha X)(1-\beta X)$. On cherche alors la décomposition en éléments simples

$$f(X) = \frac{X}{1-X-X^2} = \frac{X}{(1-\alpha X)(1-\beta X)} = \frac{A}{1-\alpha X} + \frac{B}{1-\beta X}$$

Les égalités $\dfrac{X}{1-X-X^2} = \dfrac{A}{1-\alpha X} + \dfrac{B}{1-\beta X} = \dfrac{A+B-(A\beta+B\alpha)X}{1-X-X^2}$ donne $\left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A\beta+B\alpha=-1 \end{array}\right.$ et $A(\beta-\alpha) = -1$, puis $A = \dfrac{-1}{\beta-\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -B$. En utilisant la somme de la série géométrique :

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n\geqslant 0} u^n$$

on obtient

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\alpha X} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n \geqslant 0} (\alpha X)^n - \sum_{n \geqslant 0} (\beta X)^n \right)$$

d'où finalement

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geqslant 0} (\alpha^n - \beta^n) X^n$$

qui redonne la formule fermée pour les nombres de Fibonacci :

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

On va généraliser les deux méthodes que l'on vient de voir dans les deux sections qui suivent.

II.2 Récurrences linéaires (à coefficients constants)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et pour tout k-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ de $\mathbb{C}^k$, appelons $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$(\star_k) \qquad a_{n+k} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_{k-1} a_{n+k-1}$$

Les éléments de $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ sont des suites récurrentes d'ordre k : elles sont entièrement définies par la donnée de leur k premiers termes a_0, a_1, …, a_k. Come dans le cas des suites de Fibonacci (suite récurrente d'ordre 2), on vérifie facilement que $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ (a_n)_{n \geqslant 0} & \longmapsto & (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Ainsi, $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k dont on va trouver une base en cherchant des suites géométriques solutions de $(\star_k)$:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda^n)_{n \geqslant 0} \text{ est solution de } (\star_k) & \iff & \lambda^{n+k} = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n+1} + \alpha_2 \lambda^{n+2} + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda^{n+k-1} \\ & \iff & \lambda^n (\lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1} \lambda^{k-1}) = 0 \end{array}$$

On est ainsi ramené à considérer les racines de

$$P(\lambda) = \lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1} \lambda^{k-1}$$

qui est appelé `polynôme caractéristique` associé à la récurrence $(\star_k)$. Si toutes les racines de P sont simples, on obtient aussitôt n suites récurrentes dont on vérifie sans difficultés qu'elles sont linéairement indépendantes. Lorsqu'une racine λ est de multiplicité $m > 1$, on vérifie qu'elle donne lieu aux suites linéairement indépendantes données par les termes géneraux :

$$\lambda^n, \; n\lambda^n, \; \ldots \; , n^{m-1} \lambda^n$$

(on laisse la vérification en exercice). En résumé, on a obtenu le résultat suivant :

Théorème II.1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient λ_1, λ_2, …, λ_t les t racines de*

$$P(\lambda) = \lambda^k - \alpha_0 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2 - \ldots - \alpha_{k-1} \lambda^{k-1}$$

de multiplicité, respectivement, m_1, m_2, …, m_t. L'ensemble $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ des suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$, solutions de

$$(\star_k) \qquad a_{n+k} = \alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \ldots + \alpha_{k-1} a_{n+k-1}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k dont une base et donnée par les k suites de terme général

$$\lambda_1^n, \; n\lambda_1^n, \; \ldots \; , n^{m_1-1} \lambda^n, \lambda_2^n, \; n\lambda_2^n, \; \ldots \; , n^{m_2-1} \lambda^n, \; \ldots, \; \ldots, \; \ldots, \lambda_t^n, \; n\lambda_t^n, \; \ldots \; , n^{m_t-1} \lambda^n$$

Remarque II.2. *En reprenant les notations du Théorème II.1, on a bien entendu $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$.*

Exemples II.1. *1. Cherchons l'ensemble de suites solutions de la récurrence*

$$(1) \qquad a_{n+3} = 12a_n - 4a_{n+1} + 3a_{n+2}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 3) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ *et l'ensemble* $SR(12, -4, 3)$ *est constitué des suites* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *telles que*

$$\exists\, (A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = 2^n A + (-2)^n B + 3^n C$$

2. Cherchons l'ensemble de suites solutions de la récurrence

$$(2) \qquad a_{n+3} = 8a_n - 12a_{n+1} + 6a_{n+2}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$ *et l'ensemble* $SR(8, -12, 6)$ *est constitué des suites* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *telles que*

$$\exists\, (A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = (A + nB + n^2 C)\, 2^n$$

Si l'on veut connaître une suite récurrente particulière, il suffit de rajouter les « conditions initiales » :

Exemples II.2. *Cherchons la suite solution de la récurrence*

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{n+3} = -2a_n + 3a_{n+1} \\ \text{avec } a_0 = 3,\ a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 8 \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ *et l'ensemble* $SR(-2, 3, 0)$ *est constitué des suites* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *telles que*

$$\exists\, (A, B, C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = A + nB + (-2)^n C$$

Ensuite, du système

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ A + B - 2C = 1 \\ A + 2B + 4C = 8 \end{cases}$$

on déduit $A = 2$, $B = 1$ *et* $C = 1$. *La solutions de* (3) *est donc la suite* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *de terme général*

$$a_n = 2 + n + (-2)^n$$

Remarque II.3. *On a énoncé le cas général en considérant des récurrences linéaires à coefficients complexes. Il va de soi qui tout ce qui a été dit sur la structure d'espace vectoriel de l'ensemble* $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ *reste vrai en remplaçant* $\mathbb{R}$ *par* $\mathbb{C}$ *: si* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$*, alors* $SR(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* k *(et c'est ce résultat que l'on utilisé dans les Exemples II.1 et II.2. La formulation dans* $\mathbb{C}$ *est plus générale mais permet surtout de parler des* k *racines (en comptant chaque racine avec sa multiplicité) du polynôme caractéristique (qui est de degré* k*). Ainsi, même si on prend* $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$*, il est plus simple de résoudre dans* $\mathbb{C}$*, quitte à revenir dans* $\mathbb{R}$ *en considérant, pour toute racine non réelle* λ *du polynôme caractéristique, les valeurs réelles* $\mathrm{Re}(\lambda)$ *et* $\mathrm{Im}(\lambda)$ *données par les parties réelle et imaginaire de* λ *(cf. Exemple II.3)*

Exemples II.3. *Cherchons la suite solution de la récurrence*

$$(4) \qquad a_{n+2} = -a_n - a_{n+1}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ *et l'ensemble* $SR_{\mathbb{C}}(-1, -1)$ *est constitué des suites* $(a_n)_{\geqslant 0}$ *telles que*

$$\exists\, (A, B) \in \mathbb{C}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = A\lambda^n + B\overline{\lambda}^n$$

avec $\lambda = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *Si l'on veut se restreindre aux suites à coefficients réels, l'ensemble* $SR_{\mathbb{R}}(-1, -1) = SR_{\mathbb{C}}(-1, -1) \cap \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *est constitué des combinaisons linéaires (à coeffcients réels) des suites* $(a_n)_{\geqslant 0} = (\mathrm{Re}(\lambda n))_{\geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{\geqslant 0} = (\mathrm{Im}(\lambda n))_{\geqslant 0}$*, soit encore*

$$\begin{cases} a_n = 1 \text{ si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ a_n = -1/2 \text{ si } n \not\equiv 0 \bmod 3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_n = 0 \text{ si } n \equiv 0 \bmod 3 \\ b_n = \sqrt{3}/2 \text{ si } n \equiv 1 \bmod 3 \\ b_n = -\sqrt{3}/2 \text{ si } n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

II.3 Fonctions génératrices

Soit $(a_n)_{\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. La série *formelle*

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

est appelée `fonction génératrice (ordinaire)` (ou `série génératrice) de la suite` $(a_n)_{\geqslant 0}$.

NOTA BENE : Une série formelle est simplement une façon d'encoder les termes d'une suite. A ce stade-là, elle n'est pas forcément la somme d'une fonction.

II.3.1 Séries formelles

Une `série formelle` à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ (ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans ces notes) est une expression du type

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \quad \text{avec } a_n \in \mathbb{K} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On note $K[[X]]$ l'ensemble des éries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque II.4. *Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} n! X^n \in \mathbb{R}[[X]]$ est une série formelle (même si la série $\sum_{n \geqslant 0} n! x^n$ n'est la somme d'aucune fonction en dehors de 0. De ce point de vue là, une série formelle est simplement une façon d'encoder la suite formée de ses coefficients.*

Opérations sur les séries formelles

Soient $A(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ et $B(X) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ deux séries formelles dans $\mathbb{K}[[X]]$. Les opérations qui suivent ne font que retranscrire les opérations connues sur les suites. On note $1 \in \mathbb{K}[[X]]$ la série associée à la suite $(1, 0, 0, 0, ...)$ (suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du premier qui vaut 1).

a) Egalité : $A(X) = B(X) \Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$

b) Somme : $(A + B)(X) = A(X) + B(X) := \sum_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) X^n$

c) Multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$: $(\lambda A)(X) = \lambda A(X) := \sum_{n \geqslant 0} (\lambda a_n) X^n$

d) Produit : $(AB)(X) = A(X)B(X) := \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$ avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

e) Inverse : Si $b_0 \neq 0$, $\frac{1}{B}(X) = \frac{1}{B(X)}$ est la série telle que $\frac{1}{B}(X) \times B(X) = 1$

f) Quotient : Si $b_0 \neq 0$, $\frac{A}{B}(X) := \frac{A(X)}{B(X)} = A(X)\, \frac{1}{B(X)}$

g) Composition : Si $b_0 = 0$, $(A \circ B)(X) := A(B(X)) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \big(B(X)\big)^n$

h) Dérivation : La série dérivée de A est notée A' et est définie par $A'(X) = \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \right)' := \sum_{n \geqslant 1} n a_n X^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} X^n$.

L'ensemble $\mathbb{K}[[X]]$ a donc une structure algébrique riche :

Proposition II.5. *i) Muni de la somme et de la mutiplication par les scalaires, $\mathbb{K}[[X]]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

ii) Muni de la somme et du produit, $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau commutatif unitaire.

iii) $\mathbb{K}[[X]]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative appelée `algèbre des séries formelles à une indéterminée sur` $\mathbb{K}$.

La proposition qui suit justifie la définition qui a été donnée de l'inverse.

Proposition II.6. *La série formelle $A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ admet un inverse si, et seulement si, $a_0 \neq 0$ (et, si l'inverse existe, il est unique).*

Preuve : Supposons que l'inverse de A existe, notons-le $\frac{1}{A}$ avec $\frac{1}{A}(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$. On a donc $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n X^n\right) = 1$ et, d'après la définition du produit de séries formelles $1 = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n$ avec $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ pout tout $n \geqslant 0$. Pour $n = 0$, on obtient l'égalité $1 = a_0 b_0$ qui montre que $a_0 \neq 0$ (et $b_0 = \frac{1}{a_0}$). De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 = c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} \implies b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$$

Les égalités $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et $b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$ pour $n \geqslant 1$ montre l'unicité de l'inverse (lorsqu'il existe).

Réciproquement, si l'on pose $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et $b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$ pour $n \geqslant 1$ si $a_0 \neq 0$, il est clair d'après ce qui vient d'être dit que $B(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$ est l'inverse de A. □

Exemple II.1. *Cet exemple est fondamental (même s'il n'est pas très nouveau...) :*

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geqslant 0} X^n$$

Autrement dit, la série formelle $1 - X$ est l'inverse de la série formelle associée à la suite $(1, 1, 1, 1...)$, la suite constante de valeur 1. On note que ce résultat découle de la définition du produit dans $\mathbb{K}[[X]]$ puisque

$$(1-X)\sum_{n\geqslant 0} X^n = \sum_{n\geqslant 0} X^n - \sum_{n\geqslant 0} X^{n+1} = 1 + \sum_{n\geqslant 0} X^n - \sum_{n\geqslant 0} X^n = 1$$

II.3.2 Applications aux comptages

Exemple II.2. *On cherche ici une formule « close » (ou fermée) pour la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par*

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 100 \\ a_0 = 50 \end{cases}$$

On pose alors

$$f(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} a_{n+1} X^{n+1} &= \sum_{n\geqslant 0} 4a_n X^{n+1} - \sum_{n\geqslant 0} 100 X^{n+1} \\ \iff \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n - a_0 &= 4X \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n - 100X \sum_{n\geqslant 0} X^n \end{aligned}$$

soit $f(X) - a_0 = 4Xf(X) - 100X\frac{1}{1-X}$ dont on déduit

$$f(X) = \frac{a_0}{1-4X} - \frac{100X}{(1-X)(1-4X)}$$

On effectue alors le décomposition en éléments simples

$$\frac{100X}{(1-X)(1-4X)} = \frac{A}{1-X} + \frac{B}{1-4X}$$

Recherche de A et B : $\begin{cases} \times(1-X) \text{ puis } X=1 \text{ implique } A=-100/3 \\ \times(1-4X) \text{ puis } X=1/4 \text{ implique } B=\frac{25}{3/4}=100/3 \end{cases}$

On trouve donc

$$\begin{aligned} f(X) &= \left(a_0 - \frac{100}{3}\right)\frac{1}{1-4X} + \frac{100}{3}\frac{100X}{1-X} \\ &= \left(50 - \frac{100}{3}\right)\sum_{n\geqslant 0}(4X)^n + \frac{100}{3}\sum_{n\geqslant 0} X^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{50}{3}\times 4^n + \frac{100}{3}\right)X^n \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}(50\times 4^n + 100) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0}$$

II.3.3 Généralisation des coefficients binomiaux

Soit $k \geqslant 0$ entier, nous savons que

$$f(X) = (1+X)^k$$

est la fonction génératrice associée à la suite des coefficients binomiaux $\begin{cases} a_n = \binom{k}{n} \text{ si } n \in [\![0,k]\!] \\ \\ a_n = 0 \text{ si } n > k \end{cases}$

Proposition-définition II.7. *Par extension, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout $n > 0$ entier, on pose*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}$$

et on pose également $\binom{\alpha}{0} := 1$. On a alors

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n\geqslant 0}\binom{\alpha}{n}X^n$$

*C'est la **formule du binôme généralisée**.*

Preuve : Rappelons que si f est une fonction qui admet un développement en série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_k z^k$ pour $|z| < R$ et $R > 0$, on a alors :

$$f^{(n)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)z^{k-n}$$

et, pour $z = 0$, $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, soit encore

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

A présent, si on considère $f(z) = (1+z)^\alpha$ (qui converge pour $|z| < 1$), on a

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

et pour $z = 0$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

dont on déduit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

et

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n\geqslant 0}\binom{\alpha}{n}X^n$$

□

Exemples II.4.

<u>$\alpha = 0$ **et** $\in \mathbb{N}^*$</u> **:** $\binom{0}{n} = 0$

<u>$\alpha = i \in [\![1, n-1[\![$</u> **:** $\binom{i}{n} = 0$

<u>$\alpha = n$</u> **:** $\binom{n}{n} = 1$

<u>$\alpha = -1$</u> **:** $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n$

Et on note par exemple que

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(-x)^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots$$

<u>$\alpha = -\frac{1}{2}$</u> **:** $\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}$

En effet :

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\dots\times\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\dots\times\frac{1}{2n} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!\,n!} \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Et on note en particulier que

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{-1/2}{n}(-4x)^n = \sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$$

Autrement dit, $F(x) = (1-4x)^{-1/2}$ *est la fonction génératrice de* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $a_n = \binom{2n}{n}$.

Proposition II.8. $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(n)(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}
\end{aligned}$$

□

II.3.4 Les nombres de Catalan

Il s'agit des nombres C_0, C_1, C_2, C_3, ..., définis par $\left\{\begin{array}{l} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \end{array}\right.$.

On a donc

$$\left\{\begin{array}{l}
C_1 = C_0C_0 = 1 \\
C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 2 \\
C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 5 \\
C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 2(C_0C_3 + C_1C_2) = 14 \\
C_5 = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 2(C_0C_4 + C_1C_3) + C_2C_2 = 42
\end{array}\right.$$

et on note $C(X) = \sum_{n\geqslant 0} C_n X^n$ la fonction génératrice associée.

Expression de la fonction génératrice $C(X)$

On remarque que

$$\begin{aligned}
C(X)^2 &= \left(\sum_{n\geqslant 0} C_n X^n\right)^2 \\
&= \sum_{n\geqslant 0} Q_n X^n \qquad \text{avec } Q_n = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} C_{n+1} X^n
\end{aligned}$$

Ainsi, $C(X) = \sum_{n\geqslant 0} C_n X^n = C_0 + \sum_{n\geqslant 1} C_n X^n = C_0 + X \sum_{n\geqslant 0} C_{n+1} X^n = C_0 + XC(X)^2$ et de

$$XC(X)^2 - C(X) + 1 = 0$$

on déduit

$$C(X) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2X}$$

et donc, en tenant compte de $C(0) = C_0 = 1$:

$$C(X) = \frac{1 - \sqrt{1-4X}}{2X}$$

car $\frac{1-\sqrt{1-4X}}{2X}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1 tandis que $\frac{1+\sqrt{1-4X}}{2X}$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0. D'après la Proposition II.7, on a

$$\sqrt{1-4X} = (1-4X)^{1/2} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n} (-4X)^n$$

avec

$$\begin{aligned}
(-4)^n\binom{1/2}{n} &= (-4)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\
&= (-4)^n\frac{(1)\times(-1)\times(-3)\times\ldots\times(-2n+3)}{2^n\,n!}\\
&= -2^n\frac{(1)\times(1)\times(3)\times\ldots\times(2n-3)}{n!}\\
&= -2^n\frac{(2n-2)!}{2\times 4\times\ldots\times(2n-2)\times n!}\\
&= -2^n\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\times(n-1)!\times n!}\\
&= -2\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}
\end{aligned}$$

Et finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
C(X) &= \frac{1}{2X}\left(1-\left(1+\sum_{n\geqslant 1}\binom{1/2}{n}(-4)^n\right)\right)\\
&= \frac{2}{2X}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}X^n\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}X^{n-1}\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k+1}\frac{(2k)!}{k!\,k!}X^k
\end{aligned}$$

dont on déduit l'expression des nombres de Catalan :

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{pour tout } n\geqslant 0}$$

II.3.5 Autres applications

Pour $I\subset\mathbb{N}$, on pose $F_I(X) := \sum_{n\in I} X^n$. Par exemple, $X+X^2+X^5+X^{11} = F_{\{1,2,5,11\}}(X)$.

Théorème II.9. *Soient I_1, I_2, …, $I_k\subset\mathbb{N}$ et $P = F_{I_1}F_{I_2}\ldots F_{I_k}$. Alors*

$$P(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

où a_n est le nombre de k-uplets d'entiers $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ tels que $\left\{\begin{array}{l} n_1+n_2+\ldots+n_k = n\\ \forall\, i\in[k],\ n_i\in I_i\end{array}\right.$.

Preuve : Le produit $P(X) = \left(\sum_{n\in I_1}X^n\right)\left(\sum_{n\in I_2}X^n\right)\ldots\left(\sum_{n\in I_k}X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}a_nX^n$ est une somme de monômes $X^{n_1}X^{n_2}\ldots X^{n_k}$ avec $n_j\in I_j$ pour tout $j\in[k]$. le coefficient a_n de X^n est donc le nombre de k-uplets d'entiers $(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ tels que $\left\{\begin{array}{l} n_1+n_2+\ldots+n_k = n\\ \forall\, i\in[k],\ n_i\in I_i\end{array}\right.$. □

Exemple II.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de k-uplets $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \{0,1\}^k$ tels que $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$ est bien entendu égal à 0 si $k < n$ et à $\binom{k}{n}$ si $k \geqslant n$. Le Théorème II.9 dit que $\binom{k}{n}$ est le coefficient de X^n dans $(1+X)(1+X)\ldots(1+X) = (1+X)^k$ (ce qui n'est pas une nouveauté...).*

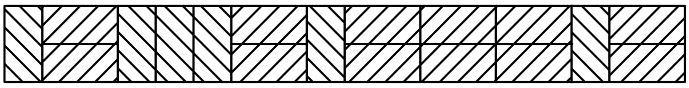
Exemple II.4. *$F(X) = (1+X+X^2+X^3+X^4+X^5)(X+X^2+X^3)(X^2+X^3+X^4+X^5+X^6)(X^5+X^6+X^7) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ est la fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ où a_n est le nombre de quadruplets $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n \\ 0 \leqslant a_1 \leqslant 5,\ 1 \leqslant a_2 \leqslant 3,\ 2 \leqslant a_3 \leqslant 6,\ 5 \leqslant a_4 \leqslant 7 \end{cases}$$

II.4 Exercices

Exercice II.1 : Trouver une formule *fermée* (ou formule *close*) pour la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la récurrence $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ et les conditions initiales $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 4$.

Exercice II.2 : De combien de manières peut-on recouvrir (sans superposition) un rectangle $2 \times n$ avec des dominos (ou rectangles 2×1) ?

Exemple de recouvrement pour $n = 18$: 

Exercice II.3 : De combien de manières peut-on colorier les cases d'un rectangle $1 \times n$ en vert ou en rouge de sorte qu'il n'y ait pas deux cases consécutives coloriées en rouge ?

Coloriage valide ($n = 11$) :

V	V	R	V	R	V	R	V	V	V	R

Coloriage non valide ($n = 11$) :

V	V	V	R	V	V	R	R	V	R	V

Exercice II.4 : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ est entier.

Exercice II.5 : 1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 2-périodique et vérifiant $a_0 = a$ et $a_1 = b$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ 3-périodique et vérifiant $a_0 = a$, $a_1 = b$ et $a_2 = c$.

Exercice II.6 : On se donne la fonction génératrice $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ que l'on notera également $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.
1. Quelle est la fonction génératrice de $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$?
2. Quelle est la fonction génératrice de $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots)$?
3. Quelle est la fonction génératrice de $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots)$?
4. Quelle est la fonction génératrice de $(a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, a_3, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ fois } 0}, \ldots)$?
5. a) Quelle est la fonction génératrice de $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$?

b) Quelle est la fonction génératrice de $(2^n)_{n\geqslant 0}$?
c) Quelle est la fonction génératrice de $(2^{\lfloor n/2\rfloor})_{n\geqslant 0}$?

Exercice II.7 : Trouver une formule explicite pour le terme général de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^{n+1}$, $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$.

Exercice II.8 : Soit k un entier strictement positif

1. a) Identifier de deux manières distinctes la suite dont la fonction $F(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n$ est la fonction génératrice.
b) En déduire que

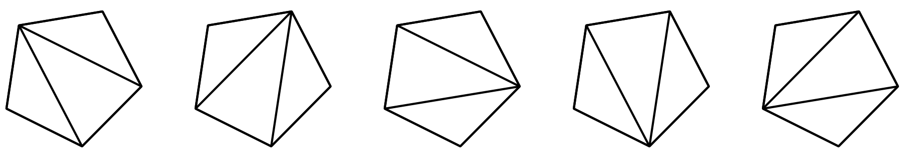
$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)^2 = \sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)x^i \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)^3 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)(i+2)x^i$$

2. a) Trouver la série génératrice de la suite $(b_n)_{n\geqslant k}$ où b_n est le nombre de manières de distribuer n balles à k joueurs de sorte que chaque joueur ait au moins une balle.
b) En déduire l'expression de $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} x^i\right)^2$ et $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} x^i\right)^3$.
c) retrouver le résultat de la question 1.b.

Exercice II.9 : 1. De combien de manières peut-on distribuer les dix carrés d'une tablette de chocolat à trois enfants de sorte que chacun d'eux ait au moins deux carrés et au plus quatre ?
2. Trouver une formule explicite pour x_n, le nombre de manières de faire un panier de n fruits composé de poires et d'oranges sachant que les oranges vont par lots de deux.

Exercice II.10 : Trouver le nombre de triplets d'entiers (u, v, w) qui vérifient les conditions $u+v+w = 6$, $-1 \leqslant u \leqslant 2$ et $1 \leqslant b, c \leqslant 4$.

Exercice II.11 : De combien de façons peut-on découper un polygone convexe à n côtés en triangles de sorte que les côtés des triangles sont des diagonales du polygone ou des arêtes du polygone et aucune de ces diagonales ne se coupent ; par exemple, pour $n = 5$:



Chapitre III

Principes ou méthodes

III.1 Preuves par bijection

Par définition, deux ensembles A et B ont même cardinal (ou sont équipotents) s'il existe une bijection de l'un des deux ensembles vers l'autre.

PRINCIPE **1.** *Soient A et B deux ensembles. Si $BIJ(A,B) \neq \varnothing$, alors $|A| = |B|$.*

Selon ce principe, pour dénombrer les éléments d'un ensemble, il suffit d'établir une bijection entre cet ensemble et un autre ensemble dont on connaît déjà le cardinal. On a déjà utilisé cette méthode, par exemple dans les preuves des Théorème I.14 et Proposition I.16. ; voici un autre exemple

Exemple III.1. *Combien d'éléments de $\mathscr{P}_k([n])$ ne contiennent pas deux entiers consécutifs ?*

On cherche le cardinal de l'ensemble

$$\mathscr{A}_{k,n} = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_k),\ \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset [n],\ a_i \leqslant a_{i+1} - 2 \text{ pour } i \in [k-1]\big\}$$

Utilisant $a_i < a_{i+1} - 1$ pour $i \in [k-1]$, on va montrer que l'application suivante H est une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_{k,n} & \longrightarrow & \mathscr{P}_k([n-k+1]) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_k) & \longmapsto & \{a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k - k + 1\} \end{array}$$

H **est bien définie :** *Si $(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k - k + 1)$, alors $a_1 = b_1 \geqslant 1$, $b_k = a_k - k + 1 \leqslant n - k + 1$ (car $a_k \leqslant n$) et $b_{k+1} - b_k = (a_{k+1} - k) - (a_k - (k-1)) = (a_{k+1} - a_k) - 1 \geqslant 2 - 1 = 1$. Ceci montre bien que $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathscr{P}_k([n-k+1])$.*

H **est bijective** *car on vérifie de la même manière que, si $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathscr{P}_k([n-k+1])$ et $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, alors $K : \mathscr{P}_k([n-k+1]) \longrightarrow \mathscr{A}_{k,n}$ définie par*

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \mapsto (b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \ldots, b_k + k - 1)$$

est bien définie et est telle que $H \circ K = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}_k([n-k+1])}$ et $K \circ H = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}_{k,n}}$.

La conclusion est que $|\mathscr{A}_{k,n}| = |\mathscr{P}_k([n-k+1])| = \binom{n-k+1}{k}$. Ce nombre est nul si $n-k+1 < k$, i.e. $n \leqslant 2k-2$.

III.2 Le principe des bergers

PRINCIPE **2.** *Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. Si $\left|f^{-1}(\{b\})\right| = \left|f^{-1}(\{b'\})\right|$ pour tous $b, b' \in B$, alors $|A| = \alpha\,|B|$ où $\alpha = \left|f^{-1}(\{b\})\right|$ pour tout b de B.*

PREUVE : Pour toute application $f : A \to B$, on a une relation d'équivalence $\sim$ sur A :

$$\forall\, a, a' \in A, \quad a \sim a' \iff f(a) = f(a')$$

(la réflexivité, la symétrie et la transitivité de $\sim$ sont évidentes). La classe d'équivalence de $a \in A$ est $f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$. Comme pour toute relation d'équivalence, $A = \bigsqcup_{a\in A} f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$ est l'union disjointe des classes d'équivalences et, en particulier, $|A| = \sum_{a\in A} \big|f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)\big|$. Ainsi, si on suppose que $\alpha = \big|f^{-1}(\{b\})\big|$ pour tout b de B, $|A| = \sum_{b\in B} \big|f^{-1}(f(b))\big| = \alpha|B|$. □

Pour les bergers, B est l'ensemble des moutons et A, celui des pattes de moutons (et $\alpha = 4$...). On a déjà utilisé ce principe dans la preuve de la Proposition I.9. De façon générale, ce principe permet de conclure lorsqu'on a une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble X dont toutes les classes d'équivalences ont même cardinal on applique alors le principe des bergers avec $A = X$ et $B = X/\mathcal{R}$, l'espace quotient). Un autre exemple bien connu (et très important) est donné par le Thèorème de Lagrange qui affirme que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre d'un groupe :

Exemple III.2. Théorème de Lagrange *Soit G un groupe fini. Pour tout sous-groupe H de G, $|H|$ divise $|G|$.*

PREUVE : *La relation dans G fini*

$$x\mathcal{R}y \iff \exists\, h \in H,\ x = yh$$

est une relation d'équivalence ($x\mathcal{R}x$ car $x = xe$ avec $e \in H$, $x = yh$ avec $h \in H$ implique $y = xh^{-1}$ avec $h^{-1} \in H$, $x = yh$ et $y = zh'$ avec $h, h' \in H$ impliquent $x = zh'h$ avec $hh' \in H$) dont les classes d'équivalences sont les gH, $g \in G$. Deux classes d'équivalences quelconques sont équipotentes puisque, pour tous $g, g' \in G$, l'application

$$H_{g'g^{-1}} \quad : \quad \begin{array}{ccc} gH & \longrightarrow & g'H \\ x & \longmapsto & g'g^{-1}x \end{array}$$

est clairement bijective (son inverse est $H_{gg'^{-1}}$. En particulier, toutes les classes d'équivalence ont même cardinal que $eH = H$, soit $|H|$. Le lemme des bergers permet de conclure que $|G| = |H||G/\mathcal{R}|$ et de conclure que $|H|$ divise $|G|$.

III.3 Doubles comptages

PRINCIPE **3.** *Soit A un ensemble. Si un premier dénombrement des éléments de A mène à la valeur N et si un second dénombrement des éléments de A mène à la valeur M, alors $N = M = |A|$.*

Nous avons déjà utilsé ce principe pour établir quelques égalités entre coeffcients binomiaux (cf. Propriétés I.12). Voici une autre illustration :

Exemple III.3. *Dans un tournoi, chaque participant joue un match contre chaque autre participant. Un match rapporte 1 point au gagnant et 0 point au perdant. Un match nul rapporte 0,5 point à chacun des deux joueurs. Pour chaque joueur, le but du tournoi est de gagner le plus possible de points et on établit un classement par nombres décroissants de points gagnés.*

A la fin du tournoi, on note que chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les dix derniers du classement.

Combien de joueurs participaient au tournoi ?

SOLUTION : *Soit k le nombre de joueurs qui participaient au tournoi et on note $\mathcal{J}$, l'ensemble des joueurs (on a donc $|\mathcal{J}| = k$). On va faire un double comptage sur le nombre de points N distribués sur l'ensemble de tous les matches du tournoi.*

1er comptage de N : $N = \binom{k}{2}$ *puisqu'il y a* $\binom{k}{2}$ *matches joués et un point distribué par match.*

2d comptage de N : *Soit $\mathcal{D} = \{J_1, J_2, \ldots, J_{10}\}$ l'ensemble des dix derniers joueurs du tournoi.*

- *$\mathcal{D}$ contribue pour* $\binom{10}{2} = 45$ *à N pour les matches entre joueurs de $\mathcal{D}$.*

- *Mais l'hypothèse selon laquelle chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les dix derniers du classement, montre que 45 est la moitié des points rapportés par les 10 derniers joueurs : autrement dit, les matches avec au moins un joueur de $\mathcal{D}$ contribuent pour 90 à N.*
- *Il reste donc à évaluer le nombre de points apportés par les matches entre joueurs de $\mathcal{J}\backslash\mathcal{D}$. Ce nombre est égal à $\binom{|\mathcal{J}\backslash\mathcal{D}|}{2} = \binom{k-10}{2} = \dfrac{(k-10)(k-11)}{2}$. Toujours selon l'hypothèse selon laquelle chacun des participants a remporté la moitié de ses points contre les joueurs de $\mathcal{D}$, la contribution de $\mathcal{J} - \mathcal{D}$ à N est donc de $(k-10)(k-11)$.*
- *Par double comptage, on a donc $N = 90 + (k-10)(k-11) = \dfrac{k(k-1)}{2}$. On en déduit $2(k^2 - 21k + 200) = k^2 - k$, puis $k^2 - 41k + 400 = 0$, soit encore $(k-16)(k-25) = 0$ (le discriminant vaut 81). Pour $k = 16$, les 6 premiers joueurs totalisent $(16-10)(16-11) = 30$ points (soit 6 points en moyenne) tandis que les 10 derniers joueurs totaliseraient 90 points (soit 9 points en moyenne) ; c'est impossible.*

La conclusion est donc qu'il y avait 25 joueurs.

III.4 Le principe des tiroirs

PRINCIPE **4.** *Soient A et B deux ensembles avec $|A| > |B|$. Alors, pour toute application $f : A \to B$, il existe $b \in B$ tel que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \geqslant 2$.*

PREUVE : Si on suppose que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \leqslant 1$ pour tout b de B, alors on a

$$|A| = \left|\bigsqcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})\right| = \sum_{b\in B} \left|f^{-1}(\{b\})\right| \leqslant \sum_{b\in B} 1 = |B|$$

ce qui contredit $|A| > |B|$. □

Exemple III.4. *Voici une illustration de l'usage du principe des tiroirs (on rappelle que $[k]^+ = [\![0,k]\!]$) :*

Théorème III.1 (Théorème des restes chinois)**.** *Soient m, n deux entiers premiers entre eux, $a \in [m-1]^+$ et $b \in [n-1]^+$. Alors, il existe un entier x solution de*

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x \equiv a \bmod m \\ x \equiv b \bmod n \end{cases}$$

PREUVE : *Une solution du système $(\mathcal{S})$ sera donnée par un entier de la liste suivante (d'entiers congrus à a modulo m) :*

$$a,\ a+m,\ a+2m,\ a+3m,\quad \ldots\quad ,\ a+(n-2)m,\ a+(n-1)m$$

qui est congru à b modulo n. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun de ces entiers n'est congru à b modulo n. Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $r_j \equiv a + jm \bmod n$ avec $r_j \in [\![0, n-1]\!]$ (autrement dit, r_j est le reste de la division euclidienne de $a + m_j$ par n). Les n valeurs $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ sont dans l'ensemble $[\![0, n-1]\!]\backslash\{b\}$ de cardinal $n-1$. D'après le principe des tiroirs, il existe donc $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ avec $i < j$ tels que $r_i = r_j$ (et notons $r = r_i = r_j$). De $a + im \equiv r \bmod n$ et $a + jm \equiv r \bmod n$, on déduit $(a+jm) - (a+im) \equiv 0 \bmod n$, soit encore $(j-i)m \equiv 0 \bmod n$. Ainsi, n divise $(j-i)m$ et, comme m et n sont premiers entre eux, on peut conclure (Lemme de Gauss) que n divise $j-i$. Mais ceci est absurde car $0 < j - i < n$. On peut donc conclure que le système (S) admet une solution.

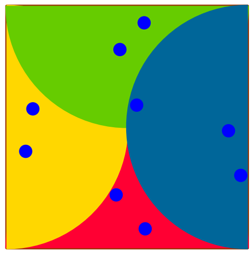
NOTA BENE *: Le Théorème des restes chinois est en fait plus précis puisqu'il précise que deux solutions quelconques diffèrent d'un multiple de mn mais cela s'obtient automatiquement puisque deux solutions de $(\mathcal{S})$ différant d'un multiple de m et d'un multiple de n, elles diffèrent forcément (à nouveau par le Lemme de Gauss) d'un multiple de mn.* □

Le principe des tiroirs dit que si n chaussettes sont rangées dans k tiroirs et si $n > k$, au moins un des tiroirs contient au moins deux chaussettes. On utilisera en fait souvent la forme suivante du principe des tiroirs (dont la preuve est similaire) :

PRINCIPE **5** (principe des tiroirs généralisé)**.** *Soient A et B deux ensembles et $k \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $|A| > k|B|$. Alors, pour toute application $f : A \to B$, il existe $b \in B$ tel que $\left|f^{-1}(\{b\})\right| \geqslant k+1$.*

Exemple III.5. *Soient 9 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon $\dfrac{1}{2}$ qui contient au moins 3 de ces 9 points).*

SOLUTION : *Par application du principe des tiroirs (généralisé), cela découle du fait que $9 > 4 \times 2$ où 4 est ici le nombre de demi-disques qui recouvrent le carré (chacun ayant pour diamètre un côté du carré).*



Exemple III.6. *Soient a_1, a_2, ..., a_n, n entiers positifs ou nuls. Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble de l'ensemble de ces nombres dont la somme des éléments est divisible par n.*

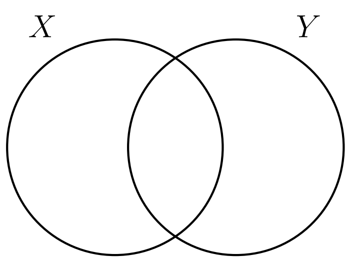
SOLUTION : *Comme 0 est un multiple de n, on peut supposer que les a_i sont non nuls et deux à deux distincts (le résultat étant évident dans le cas contraire). Considérons les nombres b_i (également deux à deux distincts) définis par $b_1 = a_1$ et $b_i = b_{i-1} + a_i$ pour i allant de 2 à n (on a donc $b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$). Si l'un de ces nombres est divisible par n, on a trouvé ce que l'on cherchait. Si aucun n'est divisible par n, on considère alors les restes $\overline{b_1}$, $\overline{b_1}$, ..., $\overline{b_n}$ de ces nombres modulo n. Comme on a n nombres et qu'ils ne peuvent prendre que $(n-1)$ valeurs (de 1 à $(n-1)$), il existe (principe des tiroirs) i et j distincts tels que $b_j - b_i$ soit divisible par n. Mais cela signifie (en supposant $j > i$) que n divise $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ et termine donc la preuve.*

REMARQUE : *On a en fait montré que le sous-ensemble cherché peut être indexé par une suite d'entiers consécutifs.*

III.5 Le principe d'inclusion-exclusion (PIE) ou « formule du crible »

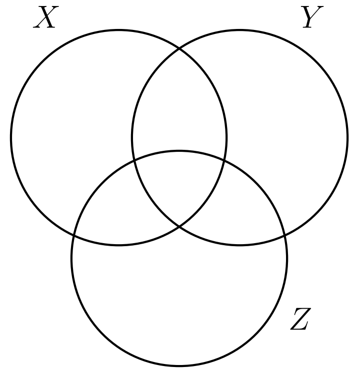
Le `principe d'inclusion-exclusion` (aussi appelé `formule du crible`) donne le cardinal d'une union à partir des cardinaux de chacun des ensembles dont il est l'union. Par exemple, le cardinal de $X \cup Y$ se déduit des cardinaux de X, Y et $X \cap Y$:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$



Le principe est simple : on compte les éléments de X, ceux de Y et on enlève ceux de l'intersection (pour ne pas les compter deux fois). La principe se généralise au cas de trois ensembles : on compte les éléments de X, ceux de Y et ceux de Z puis on enlève ceux qu'on a comptés deux fois mais il faut alors rajouter ceux qu'on avait initialement compter trois fois (i.e. ceux qui sont dans les trois ensembles) :

$$
\begin{aligned}
|X \cup Y \cup Z| &= |X| + |Y| + |Z| \\
&\quad - \big(\, |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| \,\big) \\
&\quad + |X \cap Y \cap Z|
\end{aligned}
$$



Le PIE ne fait que généraliser ces comptages.

Soit n un entier strictement positif et $\{X_i, i \in [n]\}$ une famille de n ensembles. On introduit la notation suivante : pour $J \subset [n]$, on note $X_J := \bigcap_{k \in J} X_k$ (par exemple $X_{\{1,3\}} = X_1 \cap X_3$ et $X_{\{1,3,4,6\}} = X_1 \cap X_3 \cap X_4 \cap X_6$) et pour k allant de 1 à n, $\alpha_j := \sum_{\substack{J \subset I \\ |J| = j}} |X_J|$. Par exemple :

$$
\alpha_1 = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|\,, \qquad \alpha_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |X_i \cap X_j|\,, \qquad \alpha_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < l \leqslant n} |X_i \cap X_j \cap X_l|\,, \qquad \ldots
$$

Théorème III.2 (Principe d'inclusion-exclusion, PIE 1)**.**
Pour toute famille $X_1, X_2, \ldots, X_n$ d'ensembles finis

$$
|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \alpha_j = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n \qquad (PIE\ 1)
$$

Preuve : Soit $x \in X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Il suffit de montrer que sa contribution dans le membre de droite de l'égalité (PIE) vaut 1. Notons $k = |\{X_i,\ x \in X_i\}|$, le nombre d'ensembles X_i auxquels x appartient. On a ainsi :

— x contribue avec la valeur k dans α_1

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{2}$ dans α_2 (car il y a $\binom{k}{2}$ sous-ensembles de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal 2).

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{3}$ dans α_3 (car il y a $\binom{k}{3}$ sous-ensembles de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal 3).

— ...

— x contribue avec la valeur $\binom{k}{l}$ dans α_l (car il y a $\binom{k}{l}$ parties de $\{X_i,\ x \in X_i\}$ de cardinal $l \leqslant k$).

— ...

— x contribue avec la valeur $1 = \binom{k}{k}$ dans α_k car x est dans une seule intersection X_J avec $|J| = k$.

— x contribue avec la valeur 0 dans α_l, $l > k$ car x n'est dans aucune intersection X_J avec $|J| > k$.

Finalement, la contribution de x dans le membre de droite de l'égalité (PIE 1) est

$$
\begin{aligned}
\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} &= 1 - 1 + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \\
&= 1 - \left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k}\binom{k}{k}\right) \\
&= 1 - (1-1)^k \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

Théorème III.3 (Principe d'inclusion-exclusion, PIE 2).
Pour toute famille $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de sous-ensembles d'un ensemble fini X,

$$|X \backslash (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n)| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^n \alpha_n \qquad (PIE\ 2)$$

en posant $\alpha_0 = |X|$.

Preuve : Cela découle du Théorème III.2 puisque que parmi les α_0 éléments dans X, il y en a $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ qui sont dans la réunion $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. □

Si X et Y sont deux ensembles, on note $\mathrm{SURJ}(X, Y)$ l'ensemble des surjections de X sur Y. Nous ne connaissons pas de formule explicite pour le nombre de surjections mais le PIE permet cependant d'affirmer :

Proposition III.4. *Si X et Y sont deux ensembles finis de cardinal, respectivement, k et n, alors*

$$|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)^k \binom{n}{i}$$

Preuve : On va noter $|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sigma(k, n)$. On rappelle que Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y et que son cardinal est $|Y|^{|X|} = n^k$. On peut poser $Y = [n]$ et pour $i \in [n]$, soit $A_i = \{f; f \in Y^X \text{ et } f^{-1}(\{i\}) = \varnothing\}$ l'ensemble des applications de X dans Y qui ne prennent la valeur i en aucune valeur de X. Par définition des A_i, une surjection de X sur Y est une application de X dans Y qui n'est dans aucun A_i. On a donc $\sigma(k, n) = |Y^X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ et, d'après le principe d'inclusion-exclusion :

$$\sigma(k, n) \ = \ |Y^X| - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \mathcal{A}_i \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{A}_i := \sum_{\{k_1, k_2, \ldots, k_i\} \in \mathscr{P}_i([n])} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_i}|$$

Si k_1, k_2, …, k_i sont i entiers deux à deux distincts, il existe $(n-i)^k$ applications de $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ dans $Y \backslash \{k_1, k_2, \ldots, k_i\}$. Comme il y a $\binom{n}{i}$ choix pour les nombres k_1, k_2, …, k_i, on en déduit que $\mathcal{A}_i = (n-i)^k \binom{n}{i}$ et $\sigma(k, n) \ = \ n^k - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (n-i)^k \binom{n}{i}$, soit encore

$$\sigma(k, n) \ = \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)^k \binom{n}{i}$$

□

Remarques III.5. *1. On note que si $|X| = k$ et $|Y| = n$, alors*

$$|\mathrm{SURJ}(X, Y)| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)^k \binom{n}{i} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} j^k \binom{n}{j}$$

2. On note également que pour $k = n$, on obtient une expression de la factorielle :

$$n! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} j^n \binom{n}{j}$$

Par exemple, pour $n = 4$, on trouve

$$-\binom{4}{1} + 2^4 \binom{4}{2} - 3^4 \binom{4}{3} + 4^4 \binom{4}{4} = -4 + 16 \times 6 - 81 \times 4 + 256 = 24$$

3. *Enfin, on insiste sur le fait que la formule de la Proposition III.4 est valable sans conditions sur les cardinaux (finis) de X et Y. En particulier, si $k < n$, $\mathrm{SURJ}(X, Y) = \varnothing$ et on a donc*

$$k < n \implies \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} j^k \binom{n}{j} = 0$$

Par exemple, pour $k = 3$ et $n = 5$, on obtient :

$$-\binom{5}{1} + 2^3\binom{5}{2} - 3^3\binom{5}{3} + 4^3\binom{5}{4} - 5^3\binom{5}{5} = -5 + 8 \times 10 - 27 \times 10 + 64 \times 5 - 125 = 0$$

III.6 Exercices

Exercice III.1 : 1. Quel est le nombre de parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal k et ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

2. On considère un polygone convexe à n sommets. De combien de manières peut-on sélectionner k sommets de ce polygone de sorte que deux sommets consécutifs ne soient pas dans la sélection (des sommets A et B sont dits *consécutifs* si le segment $[AB]$ est une arête du polygone).

Exercice III.2 : Soit E un ensemble fini et G un groupe fini qui agit sur E. On rappelle que cela signifie que pour tout g de G, on a une une application $\varphi_g : E \to E$, $x \mapsto g.x$ telle que, $1.x = x$ et $h.(g.x) = (hg).x$ pour tout x de E, tout (g, h) de $G \times G$ et en notant 1 l'élément neutre de G. Pour tout x de E, on notera $\mathcal{Q}(x)$ son orbite pour l'action de G et $Stab(x)$ son stabilisateur, i.e. $\mathcal{O}(x) = \{g.x,\ g \in G\}$ et $Stab(x) = \{g,\ g \in G,\ g.X = x\}$.

1. Montrer que $|\mathcal{O}(x)|\,|Stab(x)| = |G|$ pour tout x de E.

2. (Formule de Burnside) Pour tout g de G, on note $Fix(g)$ l'ensemble des points fixes pour l'action de g sur E, i.e. $Fix(g) = \{x,\ x \in E,\ g.x = x\}$ et on note $\mathcal{O}$, l'ensemble des orbites de E pour l'action de G, i.e. $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(x),\ x \in E\}$. Montrer la formule suivante qui permet de calculer le nombre d'orbites :

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Exercice III.3 : On considère la suite

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ 99999,\ \ldots$$

Montrer que l'on peut trouver un terme dans cette suite qui est divisible par 2017.

Indication : mener un raisonnement par l'absurde et considérer les restes modulo 2017 des 2017 premiers termes de cette suite.

Exercice III.4 : 1. On se donne un ensemble M de neuf entiers strictement positifs qui ne possèdent pas de diviseur premier supérieur ou égal à 6. Montrer que l'on peut trouver deux entiers dans M dont le produit est un carré parfait (un carré parfait est un entier qui s'écrit k^2 avec k entier).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, parmi $(n + 1)$ nombres pris dans l'ensemble $[2n]$, on pourra toujours en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice III.5 : Un club de judo a organisé une compétition à laquelle peut participer tout membre du club. Elle se déroule tout le long de l'année selon le principe que, chaque samedi, autant de matches que l'on veut peuvent être joués (éventuellement aucun) sachant qu'un match oppose deux joueurs et que tout membre du club joue au plus une fois contre tout autre membre. Montrer que, quelle que soit la semaine choisie, il existe au moins deux membres du club qui ont joué le même nombre de matches.

Exercice III.6 : Dans le plan, on se donne treize points à coordonnées entières. Montrer que l'on peut toujours trouver quatre points parmi eux dont le centre de gravité a des coordonnées entières (le centre de gravité des points $(x_1, y_1) \ldots, (x_k, y_k)$ est le point de coordonnées $\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}\right)$).
Indication : montrer que l'on peut trouver 5 paires de points $\{(x, y), (x', y')\}$ deux à deux disjointes et telles que $x + x'$ et $y + y'$ sont pairs. Travailler ensuite modulo 4.

Exercice III.7 : (Théorème de Dirichlet, 1842) Montrer que pour tout x réel et tout entier n strictement positif, on peut trouver une fraction rationnelle p/q telle que $1 \leqslant q \leqslant n$ et $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$.

Exercice III.8 : 1. Les élèves d'une classe ont la possibilité de jouer à deux sports. Une fois les choix exprimés, on constate que pour toute paire d'élèves $\{X, Y\}$, il y a au moins un des deux sports choisis par X et Y.

Montrer qu'il y a un des deux sports qui est choisi par tous les élèves.

2. Les élèves d'une classe ont la possibilité de jouer à trois sports. Une fois les choix exprimés, on constate que pour toute paire d'élèves $\{X, Y\}$, il y a au moins un des trois sports choisis par X et Y.

Montrer qu'il y a un des sports qui est choisi par au moins $2/3$ de l'ensemble des élèves.

Exercice III.9 : 1. Soit $N, d \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'entiers (positifs) inférieurs ou égaux à N qui sont des multiples de d ?

2. Dans l'ensemble $[1000] = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, on enlève tous les multiples de 2,3,5 et 7. Quel est le cardinal de l'ensemble ainsi obtenu ?

3. (indicatrice d'Euler) Pour un entier positif k, on note $\varphi(k)$ le nombre d'entiers n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant k$ et $\mathrm{pgcd}(n, k) = 1$. Montrer que si n admet $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_q^{k_q}$ comme décomposition en facteurs premiers, alors

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$$

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{x;\ x \leqslant n \text{ et } p_i | x\}$ pour $i \in [q]$.

Exercice III.10 : Un dérangement d'un ensemble X est une permutation des éléments de X sans point fixe ($f : X \to X$, f bijective et $f(x) \neq x$ pour tout x de X). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. On pose $d(0) = 1$.

1. Utiliser le principe d'inclusion-exclusion pour montrer que $d(n) = n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$.

Indication : considérer les ensembles $A_i = \{f; f \text{ permutation de } [n] \text{ et } f(i) = i\}$.

2. Montrer que $d(n)$ est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$.

Exercice III.11 : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de cardinal 225 et soit $X_1, X_2, \ldots, X_{11}$, onze sous-ensembles de $\mathcal{E}$, tous de cardinal 45 et tels que $|X_i \cap X_j| = 9$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant 11$. Montrer que

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{11}| \geqslant 165$$

Donner un exemple pour lequel l'égalité est vraie.

Exercice III.12 : On dit que l'entier i est *en excès pour la permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si $\sigma(i) > i$ et on note $Exc(\sigma)$ l'ensemble des entiers qui sont en excès pour σ. Par exemple, $Exc(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ si $\sigma = (147)(25)(3698)$.

Calculer le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $Exc(\sigma) \cap \{n-1, n-2\} \neq \varnothing$.

Exercice III.13 : On dit que l'entier i est une *descente de la permutation* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (on a donc forcément $i \in [n-1]$) et on note $Desc(\sigma)$ l'ensemble des entiers qui sont une descente de σ). Par exemple, $Desc(\sigma) = \{4, 6\}$ si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Combien de permutations ont un ensemble de descente inclus dans $\{1, 4, 6\}$?
2. Combien de permutations ont $\{1, 4, 6\}$ comme ensemble de descente ?
3. Combien de permutations ont un ensemble de descente inclus dans $\{1, 2, 4, 5, 7\}$?

Chapitre IV

Partitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.1 Partitions d'un entier

Définition IV.1. *Une partition de l'entier n en k parties, ou k-partition de n, est une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ telle que*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \quad \text{avec} \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_{k-1} \geqslant n_k \geqslant 1$$

Une telle partition sera notée $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ et les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ seront appelés `les termes de la partition`.

Exemple IV.1. *Les 3-partitions de 7 sont* $[5,1,1]$, $[4,2,1]$, $[3,3,1]$ *et* $[3,2,2]$.

Les 4-partitions de 7 sont $[4,1,1,1]$, $[3,2,1,1]$, $[2,2,2,1]$.

Notations

— Une partition $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ de n sera également notée $[n_1^{i_1}, n_2^{i_2}, \ldots, n_l^{i_l}]$ où i_j est le nombre de fois qu'apparaît l'entier n_j. Par exemple, les quatre 3-partitions de 7 sont

$$[5, 1^2], \quad [4, 2, 1], \quad [3^2, 1], \quad [3, 2^2]$$

et les trois 4-partitions de 7 sont $[4, 1^3]$, $[3, 2, 1^2]$ et $[2^3, 1]$. Il est clair que si $[n_1^{i_1}, n_2^{i_2}, \ldots, n_l^{i_l}]$ est une k-partition de n, alors $i_1 + i_2 + \ldots + i_l = k$ et $i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_l n_l = n$.

— On note $p_k(n)$ le nombre de k-partitions de n. Par exemple, $p_3(7) = 4$ et $p_4(7) = 3$.

— On note $p(n)$ le nombre de partitions de n.

— On notera $\Pi(n)$ (resp. $\Pi_k(n)$) l'ensemble des partitions (resp. des k-partitions) de n. On a donc $p(n) = |\Pi(n)|$ et $p_k(n) = |\Pi_k(n)|$

Remarques IV.2. *1. On a bien entendu $p_k(n) = 0$ si $k > n$.*

2. Nous savons (cf. Théorème I.14 ii)) que le nombre de k-décompositions de n, c'est-à-dire de k-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ formés d'entiers strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ est $\binom{n-1}{k-1}$. Par exemple, pour $n = 7$ et $k = 4$, aux 4 partitions $[5,1,1]$, $[4,2,1]$, $[3,3,1]$ *et* $[3,2,2]$ *correspondent les* $\binom{6}{4} = 15$ *décompositions*

$(5,1,1)$, $(1,5,1)$, $(1,1,5)$
$(4,2,1)$, $(4,1,2)$, $(2,1,4)$, $(2,4,1)$, $(1,2,4)$, $(1,4,2)$
$(3,3,1)$, $(3,1,3)$, $(1,3,3)$
$(3,2,2)$, $(2,3,2)$, $(2,2,3)$

Les décompositions de n sont également encore appelées `partitions ordonnées`.

Contrairement aux partitions ordonnées (ou décompositions) d'un entier, nous ne connaissons pas de formule explicite pour le calcul du nombre de partitions. On a cependant la récurrence qui suit.

Proposition IV.3. *Pour $n \geqslant k \geqslant 2$:*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

Preuve : Soit $\pi = [n_1, n_2, \ldots, n_k] \in \Pi_k(n)$. On raisonne sur la valeur de n_k. Si $n_k = 1$, il reste $p_{k-1}(n-1)$ choix pour $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Si $n_k > 1$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \{\pi,\ \pi \in \Pi_k(n),\ n_k > 1\} & \longrightarrow & \Pi_k(n-k) \\ [n_1, n_2, \ldots, n_k] & \longmapsto & [n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1] \end{array}$$

est une bijection et il existe donc $p_k(n-k)$ k-partitions de n telles que $n_k > 1$. □

Tableau des nombres de partitions $p_k(n)$ pour $n \leqslant 9$

Il est clair que $p_1(n) = p_n(n) = 1$ pour tout n et on obtient ainsi les valeurs suivantes :

n	$p(n)$	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$p_3(n)$	$p_4(n)$	$p_5(n)$	$p_6(n)$	$p_7(n)$	$p_8(n)$	$p_9(n)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3		1		1						
4		1			1					
5		1				1				
6		1					1			
7		1						1		
8		1							1	
9		1								1

Représentations graphiques des partitions

Les partitions sont représentées graphiquement soit par les `diagrammes de Ferrers`, soit par les `diagrammes de Young` :

Figure IV.1 – Les diagrammes de Ferrers des 3-partitions de 7 : $[5, 1^2]$, $[4, 2, 1]$, $[3^2, 1]$ et $[3, 2^2]$

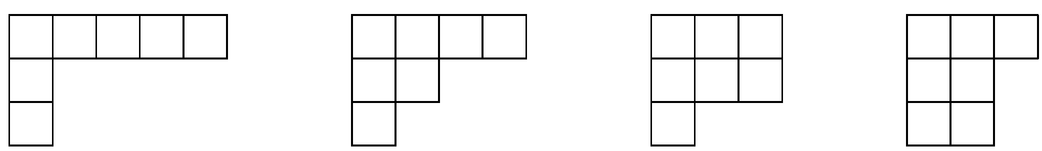


Figure IV.2 – Les diagrammes de Young des 3-partitions de 7 : $[5, 1^2]$, $[4, 2, 1]$, $[3^2, 1]$ et $[3, 2^2]$

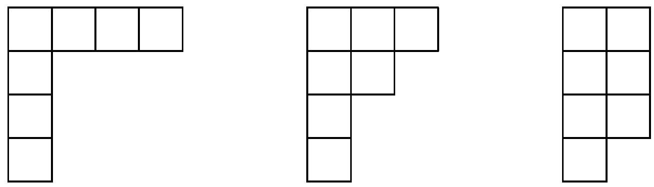


FIGURE IV.3 – Les diagrammes de Young des 4-partitions de 7 : $[4, 1^3]$, $[3, 2, 1^2]$ et $[2^3, 1]$

FIGURE IV.4 – Le diagramme de Ferrers de $\pi = [6, 5, 4, 2]$ (à gauche) et celui de la partition conjuguée $\pi^* = [4^2, 3^2, 2, 1]$

La *partition conjuguée* de la partition $\pi = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ est la partition π^* dont le diagramme de Ferrers est obtenu en prenant le symétrique du diagramme de Ferrers de π par rapport à la droite $y = -x$. Plus formellement, on a donc :

Définition IV.4. *La partition conjuguée de la partition $\pi = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ est la partition $\pi^* = [n_1^*, n_2^*, \ldots, n_{k^*}^*]$ telle que $n_j^* = |\{i,\ n_i \geqslant j\}$.*

On notera que $k^* = n_1$ dans la Définition IV.4 (dit autrement, π^* est une n_1-partition de n). Par ailleurs, il est clair que $(\pi^*)^* = \pi$ et, en particulier :

Proposition IV.5. *Le nombre de k-partitions de n est égal au nombre de partitions de n qui possèdent k comme plus grande valeur.*

IV.2 Partitions d'un ensemble et nombres de Stirling de seconde espèce

Définition IV.6. *Une* `partition` *d'un ensemble X est une famille $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \subset \mathscr{P}(X)$ de parties de X telle que*

1. *Pour tout i de $[k]$, $X_i \neq \varnothing$*
2. *Pour tout (i, j) de $[k] \times [k]$, $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$*
3. *$X = X_1 \cup X_2 \ldots \cup X_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$*

Les éléments d'une partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ seront appelés `blocs de la partition` *et une partition à k blocs sera appelée k*`-partition`*.*

Remarque IV.7. *On note que « se donner une partition d'un ensemble X » équivaut à « se donner une relation d'équivalence sur X ». Toute partition de X définit la relation d'équivalence sur X « être dans le même bloc » (et les blocs de la partition sont alors les classes d'équivalences de cette relation d'équivalence). Réciproquement, les classes d'équivalence de toute relation d'équivalence sur X forment une partition de X.*

Exemple IV.2. *Les partitions de* $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$ *sont*

1-partition *:* $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$

2-partitions *:* $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$, $\{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$

3-partitions : $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}$, $\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}$

4-partitions : $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

Définition IV.8. *Le nombre de partitions de $[n]$ en k blocs est noté $S(n,k)$. Les nombres $S(n,k)$ sont appelés* `nombres de Stirling de seconde espèce`*.*

Remarque IV.9. *Les nombres $S(n,k)$ sont aussi parfois notés $\left\{ n \atop k \right\}$.*

Exemple IV.3. *D'après l'Exemple IV.2,*

$$S(4,1)=1\,,\qquad S(4,2)=7\,,\qquad S(4,3)=6\,,\qquad S(4,4)=1$$

Remarque IV.10. *Pour tout entier $n>0$, les valeurs suivantes sont évidentes*

— $S(n,1)=1$
— $S(n,n)=1$
— $S(n,k)=0$ *si* $k>n$

Exemple IV.4. *D'après l'Exemple IV.3, $B(4)=1+7+6+1=15$.*

Rappelons que $SURJ([n],[k])$ désigne l'ensemble des applications sutjectives de $[n]$ dans $[k]$. Toute k-partition $\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$ de $[n]$ définit une surjection de $[n]$ sur $[k]$ (qui envoie $x\in X_i$ sur i) et toute application surjective $f:[n]\to[n]$ définit la partition $\{f^{-1}(i),\ i\in[k]\}$ de $[n]$. La proposition suivante précise la relation entre nombres de Stirling de seconde espèce et nombre de surjections :

Proposition IV.11. $|SURJ([n],[k])| = k!\,S(n,k)$.

Preuve : Si $k>n$, il n'y a ni partitions de $[n]$ en k blocs, ni applications surjectives de $[n]$ sur $[k]$, i.e. $|SURJ([n],[k])| = S(n,k) = 0$ et le résultat demandé est vrai.

Nous supposons à présent que $k\leqslant n$. L'application

$$\begin{array}{rcl} SURJ([n],[k]) & \longrightarrow & \{(X_1,\ldots,X_k),\ (X_1,\ldots,X_k) \text{ est une partition de } n\} \\ f & \longmapsto & (f^{-1}(i), i=1,2,\ldots,k) \end{array}$$

est clairement surjective puisque toute partition $(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ de $[n]$ est l'image de $f:[n]\to[k]$ définie par $X_i=f^{-1}(i)$ pour i allant de 1 à k. Une telle partition $(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ de $[n]$ peut-être vue comme une partition ordonnée mais rien n'oblige à poser $X_1=f^{-1}(1)$ et on a en fait k choix pour l'entier i_1 tel que $X_1=f^{-1}(i_1)$. Ensuite, on a $k-1$ choix pour l'entier i_2 tel que $X_2=f^{-1}(i_2)$. En continuant ainsi, on a $k-j+1$ choix pour l'entier i_j tel que $X_j=f^{-1}(i_j)$ pour $j\leqslant k$. On voit ainsi que la même partition est obtenue de $k!$ manières distinctes par l'apllication ϕ et on en déduite que $\dfrac{|SURJ([n],[k])|}{k!} = S(n,k)$, soit encore $|SURJ([n],[k])| = k!\,S(n,k)$. □

En tenant compte de la Proposition III.4, on a donc

$$S(n,k) \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(k-i)^n\binom{k}{i} \;=\; \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}j^n\binom{k}{j}$$

Par ailleurs, comme pour les nombres de partitions d'un entier, on peut calculer les nombres de Stirling de seconde espèce à l'aide d'une relation de récurrence :

Proposition IV.12. *Pour $n\geqslant k\geqslant 2$:*

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$

Preuve : Les partitions en k blocs de $n+1$ sont de deux types : soit elles contiennent le singleton $\{n+1\}$ comme bloc (type 1), soit elles ne contiennent pas $\{n+1\}$ comme bloc (type 2).

Il y a $S(n,k-1)$ partitions du type 1 car, une fois le singleton $\{n+1\}$ choisi comme bloc, il reste à partitionner $[n]$ en $k-1$ blocs.

Si $\{n+1\}$ n'est pas un bloc, en supprimant $n+1$ du bloc dans lequel il se trouve, on obtient une partition de $[n]$ en k blocs. et toute partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de $[n]$ peut-être obtenue de k manières différentes par cette méthode. De la même façon, toute partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de $[n]$ crée k partitions de $[n+1]$ de type 2, suivant l'ensemble X_i auquel on ajoute $n+1$. On en déduit qu'il y a $kS(n,k)$ partitions à k blocs de $[n+1]$ de type 2. □

Définition IV.13. *Le nombre total de partitions de $[n]$ est noté $B(n)$.*
Les nombres $B(n)$ sont appelés `nombres de Bell`.

Remarque IV.14. *D'après la Remarque IV.7, $B(n)$ est donc le nombre de relations d'équivalence que l'on peut définir sur un ensemble de cardinal n.*

Tableau des nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ et des nombres de Bell $B(n)$ pour $n \leqslant 9$

n	$B(n)$	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$	$S(n,8)$	$S(n,9)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3		1		1						
4		1			1					
5		1				1				
6		1					1			
7		1						1		
8		1							1	
9		1								1

On note que les nombres de Bell vérifient aussi une relation de récurrence :

Proposition IV.15. *En posant $B(0) = 1$, on a pour tout entier $n \geqslant 0$:*

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

Preuve : Dans toute partition $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de $[n+1]$, l'entier $n+1$ est dans un seul bloc X_i. Si on pose $k = |X_i \backslash \{n+1\}|$, on a $0 \leqslant k \leqslant n$. Il y a $\binom{n}{k}$ choix pour les autres k autres éléments de X_i et les $n-k$ éléments restants peuvent être partitionnés de B_{n-k} manières distinctes. Ainsi, Il y a $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de $[n+1]$ dans lesquelles $n+1$ est dans un bloc de cardinal $k+1$. Puisque la taille du bloc dans lequel se trouve $n+1$ varie de 1 à $n+1$, on en déduit que

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$$

□

A présent, pour tout entier $k \geqslant 1$, nous introduisons la notation

$$x_{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$$

et on pose également $x_{(0)} = 1$; $x_{(k)}$ est parfois appelé `factorielle descendante`.

Théorème IV.16. *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x_{(k)}$$

Preuve : On va raisonner par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation Si $n = 1$, la formule demandée est vraie car $S(1,1) = 1$ et $x = x_{(1)}$.

Hérédité On suppose que $x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x_{(k)}$ pour un $n \geqslant 1$. On a alors

$$x^{n+1} = x^n\, x = \left(\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x_{(k)}\right) x = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, \bigl(x_{(k)}\, x\bigr)$$

De $x = (x-k)+k$, on déduit

$$x_{(k)} \;=\; x_{(k)}(x-k) + x_{(k)}k = x_{(k+1)} + k\, x_{(k)}$$

et donc

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, \bigl(x_{(k+1)} + k\, x_{(k)}\bigr) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x_{(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} kS(n,k)\, x_{(k)}$$

En tenant compte (pour la dernière égalité) de la relation de récurrence de la Proposition IV.12, on obtient :

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} S(n,k-1)\, x_{(k)} + \sum_{k=1}^{n} kS(n,k)\, x_{(k)} \\
&= x_{(n+1)} \sum_{k=2}^{n} S(n,k-1)\, x_{(k)} + \sum_{k=2}^{n} kS(n,k)\, x_{(k)} + x_{(1)} \\
&= x_{(n+1)} + \sum_{k=2}^{n} \bigl(S(n,k-1) + kS(n,k)\bigr)\, x_{(k)} + x_{(1)} \\
&= x_{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1,k)\, x_{(k)} + x_{(1)}
\end{aligned}$$

□

Si $x = m$ est entier, alors $m_{(k)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1) = \dfrac{m!}{(m-k)!} = k!\dbinom{m}{k} = A_m^k$ et

Corollaire IV.17. *Pour les entiers $m, n \geqslant 1$*

$$m^n = \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k) \binom{m}{k}$$

IV.3 Permutations d'un ensemble et nombres de Stirling de première espèce non signés

On rappelle que $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $[n]$ (soit encore, l'ensemble des bijections de $[n]$ dans lui-même). Toute permutation admet une décomposition en un produit de cycles à support à support disjoints et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. Cette factorisation sera appelée *factorisation canonique*.

Définition IV.18. *Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sera dite de* `type cyclique` $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ *si c_i est le nombre de i-cycles intervenant dans toute décomposition de σ en un produit de cycles à supports disjoints.*

Exemple IV.5. *Voici quelques exemples dans $\mathcal{S}_9$:*

— $\sigma_1 = (341)(67)(5298)$ *est de type cyclique* $(0,1,1,1,0,0,0,0,0)$.
— $\sigma_2 = (341675298)$ *est de type cyclique* $(0,0,0,0,0,0,0,0,1)$.
— $\sigma_3 = (34)(67)(52)$ *est de type cyclique* $(3,3,0,0,0,0,0,0,0)$.
— $\sigma_4 = (3416)(5298)$ *est de type cyclique* $(1,0,0,2,0,0,0,0,0)$.
— $\sigma_5 = (5298)$ *est de type cyclique* $(5,0,0,1,0,0,0,0,0)$.

Théorème IV.19. *Dans $\mathcal{S}_n$, le nombre de permutations de type cyclique $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ est*

$$\frac{n!}{c_1!\, c_2! \,\ldots\, c_n!\, 1^{c_1}\, 2^{c_2} \,\ldots\, n^{c_n}}$$

PREUVE : Une permutation de $\mathcal{S}_n$ de type cyclique $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ détermine une partition de $[n]$ en $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ blocs avec c_i blocs de cardinal i. Le dénombrement de toutes ces permutations peut se faire en suivant cette démarche en quatre étapes :

Etape 1 : 0n considère d'abord les $n!$ façons de ranger les éléments de $[n]$ de manière ordonnée.

Etape 2 : Pour chacun de ces rangements, on prend d'abord c_1 singletons (ce qui veut dire : ne rien prendre si $c_1 = 0$), puis c_2 paires, puis c_3 triplets, etc... jusqu'à c_n fois un ensemble de n éléments (qui est alors forcément $[n]$...).

Etape 3 : On note ensuite qu'il y a $c_i!$ manières d'obtenir un ensemble donné de c_i parties de cardinal i. Il faut donc diviser $n!$ par $c_1!c_2! \ldots c_n!$.

Etape 4 : Pour chaque $i \in [n]$, nous avons c_i blocs de cardinal i. Soit $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \subset [n]$ un tel bloc de cardinal i. On note alors que K détermine un i-cycle qui peut etre obtenu *exactement* de i manières distinctes :

$$(a_1a_2 \ldots a_i)\,, \quad (a_2a_3 \ldots a_ia_1)\,, \quad \ldots \quad ,(a_{i-1}a_ia_1 \ldots a_{i-2})\,, \quad (a_ia_1 \ldots a_{i-1})$$

Il faut donc diviser $\dfrac{n!}{c_1!c_2! \ldots c_n!}$ par $1^{c_1}\, 2^{c_2} \ldots n^{c_n}$.

□

On note qu'il est équivalent de se donner le type cyclique $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ou de se donner la partition de n définie par les cardinaux des supports des cycles à supports disjoints en lesquels σ se décompose. Si on reprend l'exemple précédent, on a

— $\sigma_1 = (341)(67)(5298)$ est de type $(0,1,1,1,0,0,0,0,0)$ ou $[4,3,2]$.
— $\sigma_2 = (341675298)$ est de type $(0,0,0,0,0,0,0,0,1)$ ou $[9]$.
— $\sigma_3 = (34)(67)(52)$ est de type $(3,3,0,0,0,0,0,0,0)$ ou $[2^3, 1^3]$.
— $\sigma_4 = (3416)(5298)$ est de type $(1,0,0,2,0,0,0,0,0)$ ou $[4^2, 1]$
— $\sigma_5 = (5298)$ est de type $(5,0,0,1,0,0,0,0,0)$ ou $[4, 1^5]$.

Le type cyclique d'une permutation de $\mathcal{S}_n$ est donc également donné par une partition de n.

Définition IV.20. *Le nombre de permutations de $[n]$ dont la décomposition en un produit de k cycles à supports disjoints est noté $s(n,k)$.*

Les nombres $s(n,k)$ sont appelés `nombres de Stirling de première espèce` `non signés`.

Exemple IV.6. *Pour $n \leqslant 4$, il est facile de calculer les nombres de Stirling de première espèce non signés :*

n=1 $\mathcal{S}_1 = \{()\}$ *:* $s(1,1) = 1$ *et* $s(1,k) = 0$ *si* $k > 1$.

n=2 $\mathcal{S}_2 = \{(), (12)\}$ *:* $s(2,1) = s(2,2) = 1$ *et* $s(2,k) = 0$ *si* $k > 2$ *; on note que* $s(2,2) = 1$ *est donné par l'identité, soit encore* $()$ *ou encore* $(1)(2)$ *(produit de deux 1-cycles).*

n=3 $\mathcal{S}_3 = \{(), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ *:* $s(3,3) = 1$*,* $s(3,2) = 3$ *et* $s(3,1) = 2$ *et* $s(3,k) = 0$ *si* $k > 3$ *; on note ici qu'une transposition* (ab) *est une permutation produit de deux cycles, à savoir* $(ab)(c)$ *avec* $a \neq b \neq c \neq a$.

n=4 *Dans* $\mathcal{S}_4$ *vu comme ensemble des permutations de* $\{a,b,c,d\}$ *de cardinal 4, les types cycliques sont*

— *() : 1 permutation*
— *(ab) : 6 permutations*
— *(abc) : 8 permutations*
— *(abcd) : 6 permutations*
— *(ab)(cd) : 3 permutations*

et on a donc :

$s(4,4) = 1, \qquad s(4,3) = 6, \qquad s(4,2) = 8{+}3 = 11, \qquad s(4,1) = 6, \qquad s(4,k) = 0$ si $k > 4$

Les nombres de Stirling de première espèce non signés vérifient également une relation de récurrence :

Proposition IV.21. *Pour $n \geqslant k \geqslant 1$,*

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k)$$

Notons $\Sigma_k(n)$ l'ensemble des permutations de $[n]$ dont la factorisation canonique est composée de k cycles. On a donc $|\Sigma_k(n)| = s(n,k)$.

Preuve : On va considérer la partition $\{\Sigma_{n+1}, \Sigma'\}$ de $\Sigma_k(n+1)$ définie par

$$\Sigma_k(n+1) = \{f,\ f \in \Sigma_k(n+1),\ f(n+1) = n+1\} \qquad \text{et} \qquad \Sigma' = \{f,\ f \in \Sigma_k(n+1),\ f(n+1) \neq n+1\}$$

On remarque que $f \in \Sigma_{n+1}$ si, et seulement si, $(n+1)$ est un 1-cycle de f et on a une application

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_k(n+1) & \longrightarrow & \Sigma_k(n) \\ f & \longmapsto & f_{|[n]} \end{array}$$

qui est clairement une bijection. On en déduit que $|\Sigma_k(n+1)| = s(n,k)$.

A présent si $f \in \Sigma'$, $n+1$ se trouve dans un cycle de f de longueur au moins 2 et on a $f(n+1) = i$ pour un $i \in [n]$. Si l'on supprime $n+1$ de ce cycle, on obtient une factorisation en produit de k cycles à supports disjoints d'une permutation $\widetilde{f} \in \mathcal{S}_n$. Réciproquement, pour toute permutation g de $\mathcal{S}_n$, il existe une permutation $f^\sharp$ dans $\mathcal{S}_{n+1}$ telle que $\widetilde{f^\sharp} = g$ en insérant $n+1$ à la place de i dans la factorisation de g. Comme il existe n chix possibles pour i, on conclut qu'il existe n permutations f dans Σ' temmes que $\widetilde{f^\sharp} = g$ et on en conclut que $|\Sigma'| = ns(n,k)$. □

Cette relation de récurrence permet de compléter le tableau des valeurs obtenues pour n petit :

Tableau des nombres de Stirling de première espèce non signés $s(n,k)$ et des factorielles pour $n \leqslant 9$

n	$n!$	$s(n,1)$	$s(n,2)$	$s(n,3)$	$s(n,4)$	$s(n,5)$	$s(n,6)$	$s(n,7)$	$s(n,8)$	$s(n,9)$
1	1	1								
2	2	1	1							
3	6	2	3	1						
4	24	6	11	6	1					
5	120					1				
6	720						1			
7	5040							1		
8	40320								1	
9	362880									1

A présent, pour tout entier $k \geqslant 1$, nous introduisons la notation

$$x^{(k)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$$

et on pose également $x_{(0)} = 1$. $x^{(k)}$ est parfois appelé `factorielle ascendante`.

Théorème IV.22. *Pour tout entier $m \geqslant 1$,*

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n,n)x^n$$

Preuve : On va raisonner par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation Si $n = 1$, la formule demandée est vraie car $s(1,1) = 1$ et $x^{(1)} = x$.

Hérédité On suppose que $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n,n)x^n$ pour un $n \geqslant 1$.

On remarque que

$$x^{(n+1)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)(x+n) = (x+n)\,x^{(n)}$$

Or

$$x\,x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^{k+1}$$

et

$$n\,x^{(n)} = n\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$$

Ainsi, en additionnant, on trouve

$$(x+n)x^{(n)} = ns(n,1)x + \sum_{k=2}^{n}(s(n,k-1) + ns(n,k))x^k + s(n,n)x^{n+1}$$

En notant que $s(n,1) = (n-1)!$ pour tout n, on obtient $ns(n,1) = n\,(n-1)! = n! = s(n+1,1)$ et puisque $s(n,k-1)+ns(n,k) = s(n+1,k)$ d'après la Proposition IV.21 et $s(n,n) = s(n+1,n+1) = 1$, on arrive à

$$(x+n)x^{(n)} = s(n+1,1)x + \sum_{k=2}^{n} s(n+1,k)x^k + s(n+1,n+1)x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)x^k$$

□

IV.4 Exercices

Exercice IV.1 : 1. Montrer que $p_{n-1}(n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. Montrer que si $n \leqslant 2k-1$, alors $p_k(n) = p_{k-1}(n-1)$.
3. Montrer que $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor = E(x)$ est la partie entière de x).
4. Remplir le tableau des nombres de partitions $p_k(n)$ pour $n \leqslant 9$.

Exercice IV.2 : Montrer que le nombre de k-partitions de n est égal au nombre de k-partitions de $n + \binom{k}{2}$ sans répétitions d'entiers.

Par exemple, pour $n = 6$ et $k = 3$ (et $n + \binom{k}{2} = 6 + \binom{3}{2} = 9$), $p_3(6) = 3$ avec $[4,1^2]$, $[3,2,1]$ et $[2^3]$ et le nombre de 3-partitions de 9 sans répétitions d'entiers est aussi égal à 3 : $[6,2,1]$, $[5,3,1]$ et $[4,3,2]$.

Indication : passer de la partition $[n_1, n_2, \dots, n_k]$ à la partition $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ avec $m_i = n_i + k - i$ pour tout i.

Exercice IV.3 : Ecrire les termes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 de la série $F(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_n X^n = \prod_{k \geqslant 1} \frac{1}{1-X^k}$ et vérifier que F est la série génératrice associée à la suite (p_n).

Exercice IV.4 : 1. Utiliser les diagrammes de Ferrers (ou ceux de Young) pour illustrer la Proposition IV.3.
2. La *partition duale* de la partition $\pi = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ est la partition π^* dont le diagramme de Ferrers est obtenu en prenant le symétrique du diagrmme de Ferrers de π par rapport à la droite $y = -x$.

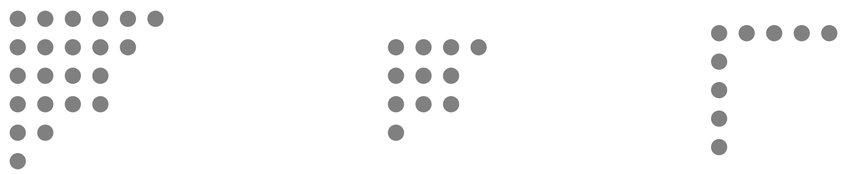


FIGURE IV.5 – Diagramme de Ferrers de partitions auto-conjuguées : $\pi = [6, 5, 4^2, 2, 1]$ (à gauche) $\pi = [4, 3^2, 1]$ (au centre) et $\pi = [5, 1^4]$ (à droite)

Utiliser les diagrammes de Young pour illustrer une preuve du résultat suivant : *le nombre de partitions auto-conjuguées de n est égal au nombre de partitions de n composées de termes impairs et deux-à-deux distincts.* Ecrire ensuite la bijection qui permet d'établir ce résultat.

Exercice IV.5 : 1. Montrer que $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Remplir le tableau des nombres de Stirling de seconde espèce $S(n, k)$ pour $n \leqslant 9$.

Exercice IV.6 : En considérant les applications de $[m]$ dans $[n]$ et en raisonnant sur le cardinal de $\mathrm{Im}(f)$ pour toute application $f : [m] \to [n]$, justifier que

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} S(m, k) \binom{n}{k} k!$$

Exercice IV.7 : 1. Dans un jeu de bridge, les 52 cartes sont distribuées à quatre joueurs qui en reçoivent chacun treize. De combien de manière distinctes les 52 cartes peuvent-elles être distribuées ?
2. Les 25 élèves d'une classe sont répartis en 4 groupes de trois, 2 groupes de quatre et un groupe de cinq. De combien de manières distinctes peut-on faire cette répartition ?

Exercice IV.8 : 1. Montrer que $s(n, n-1) = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $s(n, 1) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. Remplir le tableau des nombres de stirling de première espèce $s(n, k)$ pour $n \leqslant 9$.
4. On note $p(n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ blocs, k_i étant le nombre de blocs de cardinal i (on a donc $k_1 + 2k_2 + \ldots + ik_i + \ldots + nk_n = n$).
a) Calculer $p(7; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$, $p(7; 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$ et $p(7; 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.
b) Montrer que

$$p(n; k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ \ldots \ k_n! \ (1!)^{k_1} \ (1!)^{k_1} \ \ldots \ (n!)^{k_n}}$$

c) Comparer le résultat de la question précédente avec celui du Théorème IV.19 et s'assurer qu'on a bien compris ce qui rapproche et ce qui distingue les deux dénombrements.

Exercice IV.9 : Après avoir vérifié matriciellement le cas $n = 5$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} S(i,k)s(k,j) = \delta_{i,j} \qquad \text{et} \qquad (2) \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} s(i,k)S(k,j) = \delta_{i,j}$$

Exercice IV.10 : Soit X un ensemble formé de n éléments et Y un ensemble formé de k éléments. Quel est le nombre d'applications de X dans Y ? Quel est le nombre d'applications injectives de X dans Y ? Quel est le nombre d'applications surjectives de X dans Y ? On demande de répondre à ces questions suivant que les éléments de X et de Y sont distinguables ou pas. Autrement dit, on demande de compléter le tableau suivant :

X	Y	$\mid Y^X \mid$	$\mid \mathrm{INJ}(X,Y) \mid$	$\mid \mathrm{SURJ}(X,Y) \mid$
éléments distinguables	éléments distinguables			
éléments distinguables	éléments non distinguables			
éléments non distinguables	éléments distinguables			
éléments non distinguables	éléments non distinguables			