Ex12 feuille 3

H fermé dans E. Si $H=E$ alors $\phi=0 \Rightarrow \phi$ est C^0

On suppose maintenant $H\neq E$ alors, $\exists b\in E\setminus H$. càd $\phi(b)\neq 0$.

on choisit $a=\frac{b}{\phi(b)} \Rightarrow \phi(a)=1$.

A) 1). $y_n\in a+H$. $x_n=y_n-a\in H$.

Si $y_n\to y \Rightarrow x_n\to y-a=x \Rightarrow \begin{cases} x\in H \text{ car } H \text{ est fermé} \\ y=x+a\in a+H. \end{cases}$

2). Sinon $\forall n>0$ $\rho_n=\frac{1}{n}>0$ $\exists z_n\in B(0,\rho_n)\cap(a+H)$

$\Rightarrow |z_n|<\frac{1}{n}$ et $z_n\in a+H \Rightarrow z_n\to 0\in a+H$ car fermé

$\Rightarrow -a\in H$. Or $\phi(-a)=-1 \Rightarrow -a\notin H=\mathrm{Ker}\,\phi$.

3). Sinon $\exists x\in B(0,\rho)$ tel que $|\phi(x)|\geq 1$.

Alors $y=\frac{x}{\phi(x)}$ vérifie $\phi(y)=1$ donc $z=a-y$ vérifie $\phi(z)=0$

car $\phi(z)=\phi(a)-\phi(y)=0$. donc $z\in H$

et par suite $y=a-z\in a+H$. Or $\|y\|=\frac{\|x\|}{|\phi(x)|}<\frac{\rho}{|\phi(x)|}<\rho$.

Donc $y\in B(0,\rho)\cap(a+H)=\emptyset$

contradiction.

$\boxed{B}$ On a montré que $\exists\rho>0$ tel que $\forall x$ tel que $\|x\|<\rho \Rightarrow |\phi(x)|<1$

Soit $\varepsilon>0$ soit $\alpha=\rho\varepsilon>0$ $\forall x$ tel que $\|x\|<\alpha$

$\Rightarrow |\phi(x)|=\left|\phi\left(\frac{\varepsilon x}{\varepsilon}\right)\right|$

Or $\left|\phi\left(\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right|=\varepsilon\left|\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|<\varepsilon$

car $\left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\|<\frac{\alpha}{\varepsilon}=\rho$ et donc $\left|\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|<1$

$\Rightarrow \phi$ est continue.

Ex13

1) $u,v\in\overline{H}$ $\lambda\in\mathbb{R}$ $u=\lim_{n\to\infty} u_n^{\in H}$, $v=\lim_{n\to\infty} v_n^{\in H}$

$u_n+\lambda v_n\in H. \Rightarrow u+\lambda v\in\overline{H}$ $\overline{H}$ est un sev de E

2) $H+\mathbb{R}u\subset E$ $H\cap\mathbb{R}u=\{0\}$ car $\phi(\lambda u)=\lambda\neq 0$.
$\neq 0$ $*$

$\Rightarrow \dim(H+\mathbb{R}u)=\dim E \Rightarrow H+\mathbb{R}u=E$

3) Si ϕ n'est pas continue H n'est pas fermé et donc $\overline{H}\neq H$.

Donc il existe $y\in\overline{H}\setminus H. \Rightarrow E=H\oplus\mathbb{R}u$ avec $u=\frac{y}{\phi(y)}$

$\overline{H}$ est un sev. $H\subsetneq\overline{H}\subset E \Rightarrow \dim\overline{H}>\dim H=n-1$

donc $\dim\overline{H}=n \Rightarrow \overline{H}=E$.