ANALYSE 2 – CORRECTION CT

I 1.a) $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est C^0 sur $[a,b]\times[c,d]$, donc avec le Thm de continuité :

$\phi : x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ est C^0 sur $[a,b]$

Ensuite $F(X) = \int_a^X \phi(x)\,dx$ donc est C^1 sur $[a,b]$ et $F'(X) = \phi(X) = \int_c^d f(X,y)\,dy$

b) $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est C^0 sur $[a,X]\times[c,d]$ donc idem $\psi_X : y \mapsto \int_a^X f(x,y)\,dx$ est C^0 sur $[c,d]$.

Ensuite : $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(X) = \int_c^d \psi_X(y)\,dy$ est bien définie.

De plus : ψ, $(X,y) \mapsto \int_a^X f(x,y)\,dx$: ψ est C^1 par rapport à X et $\frac{\partial \psi}{\partial X}(X,y) = f(X,y)$

donc le Thm de dérivabilité pour les intégrales à paramètre assure que

G est C^1 sur $[a,b]$, et $G'(X) = \int_c^d \frac{\partial \psi}{\partial X}(X,y)\,dy = \int_c^d f(X,y)\,dy$

c) Alors F et G sont C^1 sur $[a,b]$, et $F' = G'$ et $F(a) = 0 = G(a)$

donc $F \equiv G$ sur $[a,b]$, donc en particulier $F(b) = G(b)$.

2.1.a) $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = R^2\cos^2\theta(t)\sin^2\varphi(t) + R^2\sin^2\theta(t)\sin^2\varphi(t) + R^2\cos^2\varphi(t)$

$= R^2\sin^2\varphi(t) + R^2\cos^2\varphi(t) = R^2$

b) $x'(t) = -R\theta'\sin\theta\sin\varphi + R\varphi'\cos\theta\cos\varphi$

$y'(t) = R\theta'\cos\theta\sin\varphi + R\varphi'\sin\theta\cos\varphi$

$z'(t) = -R\varphi'\sin\varphi$

$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = R^2\theta'^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\varphi'^2\cos^2\theta\cos^2\varphi - 2R^2\theta'\varphi'\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$+ R^2\theta'^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\varphi'^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2R^2\theta'\varphi'\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$+ R^2\varphi'^2\sin^2\varphi$

$= R^2\theta'^2\sin^2\varphi + R^2\varphi'^2\cos^2\varphi + R^2\varphi'^2\sin^2\varphi$

$= R^2\theta'^2\sin^2\varphi + R^2\varphi'^2$

d'où ce qu'on voulait.

2.2. a) $\int_0^1 R\varphi'(t)dt = R(\varphi(1)-\varphi(0)) = R\frac{\pi}{2}$ (2)

$L(\gamma) = \int_0^1 R\sqrt{\varphi'(t)^2 + \theta'^2(t)\sin^2\varphi(t)}\,dt \geq \int_0^1 R\sqrt{\varphi'(t)^2}\,dt = R\int_0^1 |\varphi'(t)|dt$

$\geq R\int_0^1 \varphi'(t)dt = R\frac{\pi}{2}$

b) On choisit $\theta(t) = 0$ et $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}t$

alors $L(\gamma) = \int_0^1 R\sqrt{\varphi'(t)^2 + \theta'(t)^2\sin^2\varphi(t)}\,dt = \int_0^1 R\frac{\pi}{2}\,dt = R\frac{\pi}{2}$

II 1. a) On prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x^2)$

b) f est C^1 donc le Thm de C.L s'applique : le pbm $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution $x :]T_*(x_0), T^*(x_0)[$ définie sur l'intervalle le plus gd possible.

c) $f(x) = 0 \iff x = 0,\ x = 1$ ou $x = -1$.

d) . Il n'existe pas $t_0 \in]T_*(x_0), T^*(x_0)[$ tel que $x(t) = 0$:

sinon x vérifierait : $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$, et ce pbm a une et une seule solution maximale, et la fct nulle en est solution, donc on aurait.

$x \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, et en particulier $x(0) = 0$. absurde.

. De la même manière, il n'existe pas $t_1 \in]T_*(x_0), T^*(x_0)[$ tel que $x(t_1) = 1$

Ainsi : $\forall t \in]T_*(x_0), T^*(x_0)[$, $x(t) \neq 0$ et $x(t) \neq 1$.

Comme $x(0) = x_0 \in]0,1[$, le TVI assure que :

$\forall t \in]T_*(x_0), T^*(x_0)[$, $0 < x(t) < 1$

Le Thm existence globale / explosion assure alors que comme x est bornée sur son intervalle d'existence, on a $T_*(x_0) = -\infty$ et $T^*(x_0) = +\infty$.

De plus : $x'(t) = \underbrace{x(t)}_{>0}\underbrace{(1-x(t)^2)}_{>0} > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$t \to +\infty$: x est croissante et majorée, donc tend vers une limite ℓ^+,

$$0 < x(t) < 1 \implies 0 < \ell^+ \leq 1$$

Comme ℓ^+ est pt d'équilibre, on a forcément $\ell^+ = 1$.

Et de même : $t \to -\infty$: $x(t) \longrightarrow \ell^-$ et $\ell^- = 0$.

2. a) • Sous forme équa diff d'ordre 2 :

$$x''(t) = -y'(t) = -x(t)$$

donc x solution de $x'' + x = 0$

éq caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, donc racines i et $-i$

donc $\exists A, B$ tq : $x(t) = A\cos t + B\sin t$

$x(0) = x_0 \implies A = x_0$

$y_0 = y(0) = -x'(0) \implies y_0 = -B$

$x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t$

$y(t) = -x'(t) = x_0\sin t + y_0\cos t$

(et on vérifie que c'est bien solution).

• Sous forme complexe : $z(t) = x(t) + i\,y(t)$

$$\begin{cases} z'(t) = x'(t) + i\,y'(t) = -y(t) + i\,x(t) = i\,z(t) \\ z(0) = x_0 + i\,y_0 \end{cases}$$

donc $z(t) = e^{it} z_0 = (\cos t + i\sin t)(x_0 + i y_0)$

donc $\begin{cases} x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t \\ y(t) = y_0\cos t + x_0\sin t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ donc $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$: le pt part de $A(1,0)$ et parcourt le cercle trigonométrique dans le sens direct.

III 3) $\begin{cases} 0 = 3x^2 - 3y \\ 0 = 3y^2 - 3x \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$

donc (x,y) pt critique $\implies$ $y = x^2 = y^4$

$x = y^2 = x^4$

Or $x^4 - x = x(x^3 - 1)$ donc : $x = 0$ ou $x = 1$, et donc pt critiques $\implies \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 1 \end{cases}$

donc il y a 2 pts critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$

b) $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

matrice symétrique donc vp réelles

produit des vp $=$ det $H_f = 6\times 6 - 3\times 3 = 27 > 0$ donc vp de même signe

somme des vp $=$ trace $H_f = 6+6 = 12$

donc les vp sont > 0 (on peut aussi les calculer...)

donc $(1,1)$ est un pt de minimum local strict.

2) "si G admet un max local en (a,b), alors $DF(a,b)$ et $DG(a,b)$ sont colinéaires"

4) a) $(x^2+y^2)^2 - (x^2y^2) = 0 \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = x^2y^2 \leq x^2+y^2$

et donc $(x^2+y^2)(x^2+y^2-1) \leq 0$

donc $(x^2+y^2-1) \leq 0$

Alors : appelons $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2 - (x^2y^2)$.

$\mathcal{C} = F^{-1}(0)$ donc est fermé car F est continue

et est borné car $(x,y) \in \mathcal{C} \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1$

donc compacte

b) $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{C}$ compacte.

Donc elle atteint son max (et son min) sur $\mathcal{C}$.

Au pt du max : $DF(a,b) \begin{vmatrix} 2(2a)(a^2+b^2) - 2a \\ 2(2b)(a^2+b^2) + 2b \end{vmatrix} \; // \; DG(a,b) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

donc $\det \begin{pmatrix} 4a(a^2+b^2) - 2a & 0 \\ 4b(a^2+b^2) + 2b & 1 \end{pmatrix} = 0$

donc $4a(a^2+b^2) - 2a = 0$: $2a(a^2+b^2) = a$

1

donc : $a=0$ ou $2(a^2+b^2)=1$

$\Downarrow$

$0=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)=b^4+b^2=b^2(b^2+1) \Rightarrow b=0$

$G(a,0)=0$

et $2(a^2+b^2)=1 \Rightarrow 0=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)$

$= \frac{1}{4}-(a^2-b^2)$

donc $\begin{cases} a^2+b^2=\frac{1}{2} \\ a^2-b^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad 2a^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad a^2=\frac{3}{8}$

$2b^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \quad b^2=\frac{1}{8}$

$\rightarrow$ 4 pts possibles $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$ $\quad \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$

$\left(\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$ $\quad \left(-\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$

en ces pts : $G=\sqrt{\frac{1}{8}}$, ou $-\sqrt{\frac{1}{8}}$

alors : G atteint son max

en ce pt, $\nabla F(a,b) \parallel \nabla G(a,b)$, donc $(a,b) \in \left\{(0,0), \left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\right\}$

et en comparant la valeur de G en ces pts :

$$\max_{\mathcal{C}} G = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\rightarrow$ le pt le + haut de la lemniscate est à une hauteur $=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5) a) $z=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0+x+0=x$

position relative : il y a 2 pts à comparer :

- le pt $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{vmatrix}$ qui appartient à la surface

- le pt $M' \begin{vmatrix} x \\ y \\ z = x \end{vmatrix}$ qui appartient au plan tangent

On compare les hauteurs :

$$z_M - z_{M'} = f(x,y) - z_{M'} = f(x,y) - x = y^2 \geq 0$$

donc le pt de la surface est au dessus du pt du plan tangent

↳ la surface est au dessus du plan tangent.

b) clairement $f(x,y) \geq x$

donc $B' \subset B$

$$Vol(B') = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} x \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} [xy]_0^1 \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$Vol(B) = \int_{x=0}^{2} \int_0^1 f(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_0^1 x + y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left(x + \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x\right]_0^2$$

$$= 2 + \frac{2}{3}$$

1) a) $x'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2}$ $\qquad$ $y'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^3}$

$x'(t) = 0 \iff 2t = \dfrac{2}{t^2}$ $\qquad$ $y'(t) = 0 \iff 2t = \dfrac{2}{t^3}$

$t^3 = 1$ $\qquad$ $t^4 = 1$

$t = 1$ $\qquad$ $t = 1$ (car $t > 0$)

t	0		1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

$$\begin{cases} x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3} \\ y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'''(t) = -\frac{12}{t^4} \\ y'''(t) = \frac{-24}{t^5} \end{cases}$$

donc $\begin{vmatrix} x'(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{vmatrix}$: $M(1)$ pt singulier $\quad \begin{vmatrix} x''(1) \\ y''(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \\ 8 \end{vmatrix}$: tangente dirigée par $\begin{vmatrix} 6 \\ 8 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x'''(1) \\ y'''(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 \\ -24 \end{vmatrix}$ non colinéaire à $\begin{vmatrix} 6 \\ 8 \end{vmatrix}$

donc $p = 2$, $q = 3$: pt de rebroussement de 1ère espèce

c) $t \to +\infty$: $\begin{cases} x(t) \to +\infty \\ y(t) \to +\infty \end{cases}$ donc branche infinie

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 + 1/t^2}{t^2 + \frac{2}{t}} = \frac{1 + \frac{1}{t^4}}{1 + \frac{2}{t^3}} \to 1$$

$$y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \to 0 \qquad \text{donc } y = x \text{ est droite asymptote.}$$

Position relative de la courbe et de l'asymptote:

2 pts à considérer: $M(t) \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$ le pt de la courbe d'abscisse $x(t)$

$\tilde{M}(t) \begin{vmatrix} x(t) \\ x(t) \end{vmatrix}$ le pt de l'asymptote d'abscisse $x(t)$

lequel au dessus de l'autre ?

$$y_{\tilde{M}(t)} - y_{M(t)} = x(t) - y(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^2 - t}{t^3}$$

pour t gd ($t > \frac{1}{2}$ en fait) $\quad y_{\tilde{M}(t)} - y_{M(t)} > 0$, donc la courbe est au dessous de l'asymptote

d) $t \to 0^+$ $\quad \begin{matrix} x(t) \to +\infty \\ y(t) \to +\infty \end{matrix}$ donc branche ∞.

$x(t) \sim \frac{2}{t} \quad y(t) \sim \frac{1}{t^2} \quad$ donc $\quad y(t) \sim \left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} x(t)^2$

$$y(t) - \frac{1}{4} x(t)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{4}\left(t^4 + 4t + \frac{4}{t^2}\right) = t^2 - \frac{1}{4} t^4 - t$$

donc $y(t) - \frac{1}{3}x(t)^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

ainsi le pt $M(t) \left| \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right.$ est très proche du pt $M^*(t) \left| \begin{matrix} x(t) \\ \frac{1}{3}x(t)^2 \end{matrix} \right.$ qui est sur la parabole $y = \frac{1}{3}x^2$

donc $y = \frac{1}{3}x^2$ est parabole asymptote à la courbe qd $t \to 0^+$.

Rq: $y(t) - \frac{1}{3}x(t)^2 = -t + t^2 - \frac{1}{3}t^3 \longrightarrow 0^-$

donc $y_{M(t)} - y_{M^*(t)} < 0$ pour $t \to 0^-$

donc la courbe est au dessous de la parabole asymptote.

e)