Feuille 1—Corrigé des exercices supplémentaires

Exercice 9 Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit la différence symétrique de deux événements A et B de $\mathcal{A}$ par $A\Delta B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Montrer que :

1. la fonction $(A, B) \mapsto d(A, B) := \mathrm{P}(A\Delta B)$ est une semi-distance sur $\mathcal{A}$, à savoir que les propriétés sont celles d'une distance sauf la suivante : si $A = B$, alors $\mathrm{P}(A\Delta B) = 0$ mais la réciproque n'est pas vraie. Par quelle(s) relation(s) peut-on la remplacer ?
2. Montrer que pour tous A, B dans $\mathcal{A}$ on a $|\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)| \leqslant \mathrm{P}(A\Delta B)$.

Correction

1. D'après la définition $A\Delta B = B\Delta A$ et on a donc $d(A, B) = d(B, A)$ (d est symétrique).

D'autre part $A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$: en effet, si x est dans l'ensemble de droite on est, par définition de Δ, dans l'un des cas $x \in A, x \notin C$ ou $x \in C, x \notin A$;[1] supposons que $x \in A$ et $x \notin C$, soit $x \in B$ soit $x \notin B$. Dans le premier cas on a $x \in B \setminus C \subset B\Delta C$, dans le second $x \in A \setminus B \subset A\Delta B$, dans les deux on a donc $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$. Si l'on suppose $x \in C, x \notin A$ alors en permutant A et C dans l'argument ci-dessus on obtient de même que $x \in (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$.

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} d(A, C) = \mathbb{P}(A\Delta C) &\leq \mathbb{P}((A\Delta B) \cup (B\Delta C)) \\ &\leq \mathbb{P}(A\Delta B) + \mathbb{P}(B\Delta C) = d(A, B) + d(B, C). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que d satisfait à l'inégalité triangulaire.

On peut avoir $d(A, B) = 0$ sans que $A = B$: la deuxième propriété signifie que $A\Delta B = \emptyset$, et pour avoir la première il suffit que $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$. En revanche la fonction d définit bien une distance sur l'espace quotient de $\mathcal{A}$ par la relation d'équivalence $A \sim B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\Delta B) = 0$.

2. Comme $A \cup B$ est l'union disjointe de $A\Delta B$ et $A \cap B$ on a :

$$\mathbb{P}(A\Delta B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et il suit que

$$\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ il vient

$$\mathbb{P}(A\Delta B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$

et en utilisant de même que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ on obtient $\mathbb{P}(A\Delta B) \geq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. On a donc bien $\mathbb{P}(A\Delta B) \geq |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)|$.

Exercice 10 Une urne U_1 contient p boules rouges et q boules noires. Une urne U_2 contient q boules rouges et p boules noires. On effectue une suite de tirages d'une boule, soit dans U_1, soit dans U_2, avec les règles suivantes :

— Si à un tirage on a obtenu une boule rouge, le tirage suivant s'effectue dans U_1. Sinon, le tirage suivant se fait dans U_2.

— Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne d'où elle provient.

Le premier tirage se fait dans U_1. On note A_n l'événement "la $n$ième boule tirée est rouge".

1. Calculer $\mathrm{P}(A_n | A_{n-1})$ et $\mathrm{P}(A_n | \overline{A_{n-1}})$.
2. En déduite $\mathrm{P}(A_n)$ en fonction de $\mathrm{P}(A_{n-1})$.

1. En termes de propositions logiques : l'opérateur Δ représente le "ou exclusif" XOR.

3. Calculer alors $P(A_n)$ en fonction de n et la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Correction
1. D'après l'énoncé, si on est dans A_{n-1} alors le n-ème tirage se fait dans l'urne U_1. On a donc :

$$\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) = \mathbb{P}(\textit{tirer une boule rouge dans } U_1) = \frac{p}{p+q}.$$

De la même manière on a :

$$\mathbb{P}(A_n|\overline{A_{n-1}}) = \frac{q}{p+q}.$$

2. D'après la question précédente et la "loi des probabilités totales" on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n|\overline{A_{n-1}}) \cdot \mathbb{P}(\overline{A_{n-1}})\\ &= \mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n|\overline{A_{n-1}}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A_{n-1}))\\ &= \frac{p-q}{p+q} \cdot \mathbb{P}(A_{n-1}) + \frac{q}{p+q}.\end{aligned}$$

3. Résoudre la récurrence $u_{n+1} = \frac{p-q}{p+q} u_n + \frac{q}{p+q}$ avec la valeur initiale $u_1 = \frac{p}{p+q}$ donne la formule suivante :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n + 1\right).$$

Exercice 11 Une urne contient 2 boules, chacune ayant une probabilité p d'être blanche et une probabilité $(1-p)$ d'être noire. On effectue dans cette urne une succession de n tirages d'une boule avec remise. Si les n tirages ont amené une boule blanche, quelle est la probabilité p_n que l'urne contienne 2 boules blanches ? Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Correction *On note B_n l'évènement correspondant à un tirage de n boules blanches successives, et pour $i = 0, 1, 2$ on note U_i l'évènement correspondant à la présence de i boules blanches dans l'urne. Comme la probabilité de B_n sachant que l'urne en contient 2 vaut 1, le théorème de Bayes donne l'égalité suivante :*

$$\mathbb{P}(U_2|B_n) = \frac{\mathbb{P}(U_2)}{\mathbb{P}(B_n)}.$$

On a $\mathbb{P}(U_2) = p^2$ (en supposant que les couleurs des deux boules sont indépendantes l'une de l'autre), il reste à calculer $\mathbb{P}(B_n)$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|U_2)\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(B_n|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B_n|U_0)\mathbb{P}(U_0)\\ &= 1 \times p^2 + \frac{1}{2^n} 2p(1-p) + 0 \times (1-p)^2\\ &= p\left(p + \frac{1-p}{2^{n-1}}\right).\end{aligned}$$

On obtient donc au final la formule :

$$p_n = \mathbb{P}(U_2|B_n) = \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}$$

et on voit immédiatement que $p_n \to 1$ quand $n \to +\infty$ (on a même le développement $p_n - 1 \sim_{n\to+\infty} \frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$).

Exercice 12 Jordi et Miryam passent ensemble un examen noté sur A, B, C. On sait que la probabilité d'avoir B est de 3/10 pour Jordi et de 4/10 pour Miryam. On sait de plus que la probabilité que l'un des deux ait B sans qu'aucun n'ait A est de 1/10. On note F l'évènement où l'un des deux a B mais aucun n'a C, calculer $\mathbb{P}(F)$.

Correction *On définit les évènements suivants :* J_n *est "Jordi a n" et* M_n *est "Miryam a n" pour* $n = A, B, C$*. On a :*

$$\mathbb{P}(J_B \cap M_B) + \mathbb{P}(J_B \cup M_B) = \mathbb{P}(J_B) + \mathbb{P}(M_B) = \frac{7}{10}.$$

D'autre part on peut écrire :

$$F = (M_B \cap J_B) \cup \big((M_B \cup J_B) \cap (M_A \cap J_A)\big). \tag{1}$$

On note $G = (M_B \cup J_B) \cap (M_A \cap J_A)$ *et* H *l'énènement* $(M_B \cup J_B) \cap \overline{(M_A \cup J_A)}$*, de sorte que* $H \subset M_B \cup J_B$ *et* $G = (M_B \cup J_B) \setminus H$*. On a donc :*

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(M_B \cup J_B) - \mathbb{P}(H)$$

et il suit, vu que l'union donnée en (1) *est disjointe, que :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(M_B \cap J_B) + \mathbb{P}(G)\\ &= \mathbb{P}(M_B \cap J_B) + \mathbb{P}(M_B \cup J_B) - \mathbb{P}(H) = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(F) = \frac{3}{5}.$$