Corrigé

①

Ex 1

1) $f(z) = e^{-iz}$ vérifie $|f(z)| = |e^{-i(x+iy)}| = e^{y}$

2) $h = \frac{g}{f}$ vérifie $|h(z)| \leq 1$ et h est entière car f ne s'annule pas.

Par le théorème de Liouville h est constante.

Donc les solutions sont $\{Ce^{-iz}$ avec $|C| \leq 1\}$.

Ex 2

1) f est la composée de deux fonctions holomorphes. où $z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\sin$ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

$\{0\}$ est donc une singularité isolée de f.

c'est une singularité essentielle car lorsque $t \to 0^+$ $1/t \to +\infty$ et $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ n'a pas de limite.

D'après la classification des singularités, si cette singularité était un pôle ou inexistante, $|\sin \frac{1}{z}|$ aurait une limite $+\infty$ ou finie.

2) $\sin z = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1$

$\iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$Z_0 = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(z) = 0 \iff \frac{1}{z} \in Z_0 \iff \frac{1}{z} = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \iff z = \frac{1}{k\pi}, \; k \in \mathbb{Z}^*$

$Z = \left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*\right\}$

3) Toutes les suites extraites convergent vers 0 car si (k_j) est une suite de points de $\mathbb{Z}^*$ distincts alors $|k_j| \to +\infty$ croissante

donc $\frac{1}{k_j \pi} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

$Acc(Z) = \{0\}$

Le principe des zéros isolés dit qu'aucun zéro ne peut être accumulé par une suite de zéros du domaine pour une fonction holo

Le point $\{0\}$ n'est pas un zéro car il n'est pas dans le domaine de définition, ceci ne contredit donc pas le principe des zéros isolés.