Ex3 1) Les singularités de f sont les pôles càd les racines de $(z^2+a^2)(z^2+b^2)$

Or, $z^2+a^2=0 \iff z=\pm ia$

$z^2+b^2=0 \iff z=\pm ib.$

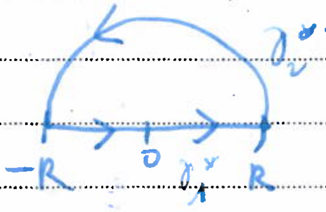
$S=\{\pm ia, \pm ib\}.$

Ces pôles sont simples ainsi $Rés(f,\pm ia) = \dfrac{e^{i(\pm ia)}}{(\pm 2ia)((\pm ia)^2+b^2)}$

$= \dfrac{e^{\mp a}}{\pm 2ia(b^2-a^2)}$

De même, $Rés(f,\pm ib) = \dfrac{e^{\mp b}}{(a^2-b^2)(\pm 2ib)}$

2)



3) f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus S$. Le lacet Γ est homotope à un point dans $\mathbb{C}$. Donc le théorème des résidus donne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{z\in S} Res(f,z)\, Ind_\Gamma(z)$$

Si $R<a<b$ $\quad Ind_\Gamma(z)=0 \quad \forall z\in S$ (1)

$a<R<b$ $\quad Ind_\Gamma(z)=0$ pour $z\in S\setminus\{ia\}$ (2)

$=1$ pour ia

$R<a<b$ $\quad Ind_\Gamma(z)=0$ pour $z\in\{-ia,-ib\}$ (3)

$=1$ pour $z\in\{ia, ib\}$

Cas (1) $\int_\Gamma f(z)\,dz=0$

Cas (2) $\dfrac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz = \dfrac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)}$ $\qquad \int_\Gamma f(z)\,dz = \dfrac{\pi e^{-a}}{b^2-a^2}.$

Cas (3) $\dfrac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)\,dz = \dfrac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)} + \dfrac{e^{-b}}{(a^2-b^2)(2ib)}$

Donc $\int_\Gamma f(z)\,dz = \dfrac{\pi}{b^2-a^2}\left(\dfrac{e^{-a}}{a} - \dfrac{e^{-b}}{b}\right)$