③

4) Pour $z \in \gamma_2^*$. $\quad f(z) = \dfrac{e^{iRe^{\pi i t}}}{(Re^{2i\pi t}+a^2)(Re^{2i\pi t}+b^2)}$

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-R\sin \pi t}}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \quad \text{pour } |R| > b > a > 0.$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{e^{-R\sin \pi t}}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\right| \text{Long}(\gamma_2^*) \leq \frac{\pi R e^{-R\sin \pi \theta}}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}$$

$$\leq \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

5) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}\,dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)} + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Lorsque $R \to +\infty$ $\quad \displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)$ car $R>b>a$

Ainsi, puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt$ converge car $\dfrac{e^{it}}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$

est majorée par $\dfrac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ qui converge, on peut passer à la limite.

$$\frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt$$

En identifiant parties réelles et complexes

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\,dt = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right).}$$