Exercice 4 (4)

1) La suite $u_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

Soit K un compact de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, soit $M>0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in K$.

Alors pour $k > M$ $\left|\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \leq \frac{2M}{k^2-M^2}$ pour $z \in K$.

Ainsi $\sum_{k>N}^{n} \left|\frac{2z}{z^2-k^2}\right| \leq 2M \sum_{k>N}^{M} \frac{1}{k^2-M^2}$ pour n grand. $M>N>M$

série qui converge car en $\frac{1}{k^2}$.

Ainsi $u_n(z)$ est une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur les compacts de de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Weierstrass, la limite est une fonction holomorphe.

Ainsi $u(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$ est une fonction holomorphe.

2) f est une fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ car les pôles (seules singularités) de $\cotan(\pi z)$ sont les zéros de sinus c.a.d $\mathbb{Z}$ et les singularités de $\frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2-k^2}$ sont $\mathbb{Z}$.

Les pôles sont simples car les racines sont simples.

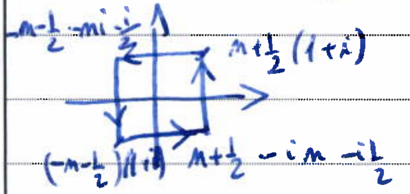
Le résidu en k de $\cotan \pi z$ est $\lim_{z \to k} (z-k) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\cos \pi k}{\pi \cos \pi k} = \frac{1}{\pi}$

le résidu en k de $u(z)$ est pour $k \neq 0$

$\frac{-2k}{k+k} = 1$ Par suite, $\mathrm{Rés}(f, k) = \pi\left(\frac{1}{\pi}\right) - 1 = 0.$

Par suite la partie polaire est nulle et les singularités sont inexistantes. La fonction f est entière!

3)



4) $\int_{\gamma_n} \frac{1}{(u-k)(u-z)} du = \mathrm{Rés}(g,k)\, \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(k) + \mathrm{Rés}(g,z)\, \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(z)$

où $g(u) = \frac{1}{(u-k)(u-z)}$