Pour z fixé, $\dfrac{\alpha \leq M\, 8n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\frac{\frac{1}{2}-|z|}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8M$

Nous avons donc montré que pour z fixé et n suffisamment grand $2|z| < n+1$.

$$|v_n(z)| \leq 8M\,\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{2}-z\right)/n\right)}$$

En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$ nous obtenons
$|f(z)| \leq 8M$.

Soit $K = 8M$.

7) f est une fonction entière bornée, elle est donc constante.
Soit $f(z) = C$ c'est à dire.

$$\pi\cot(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-k^2} = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\cot(\pi z)}{z} - \frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{z^2-k^2} = \frac{C}{z}$$

Or, lorsque z tend vers 0. $\alpha = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z} - \frac{1}{z^2} = \frac{\pi\cos\pi z}{z\sin\pi z} - \frac{1}{z^2}$

c.à.d $\alpha = \dfrac{\pi z\cos(\pi z) - \sin\pi z}{z^2\sin\pi z} = \dfrac{\pi z\left(1-\frac{(\pi z)^2}{2}\right) - (\pi z) + \frac{(\pi z)^3}{6} + o(z^3)}{z^2\left(\pi z\left(1-o(\pi z)\right)\right)}$

$$= \frac{-(\pi z)^3/2 + \frac{(\pi z)^3}{6} + o(z^3)}{\pi z^3\left(1-o(\pi z)\right)} = \frac{-\pi^3 z^3/3 + o(z^3)}{\pi z^3\left(1-o(\pi z)\right)} = -\frac{\pi^2}{3} + o(1)$$

Par suite on peut passer à la limite dans l'expression lorsque z tend vers 0. On obtient que $-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2} = \lim_{z\to 0}\frac{c}{z}$

De ce fait $c = 0$.

8) Découle de 7 !.