Contrôle Terminal 'Analyse 2' (3h)

Le barême est indiqué à titre indicatif. Documents interdits. L'utilisation de la calculatrice est autorisé.

1 Intégration (4,5 pts)

1.1 Intégrales classiques à paramètre (2,5 pts)

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. On va montrer que

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

On considère

$$F, G : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(X) := \int_a^X \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx, \quad G(X) := \int_c^d \Big(\int_a^X f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

a) Justifier (à l'aide du cours, sans redémontrer) que la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,dy$ est continue sur $[a,b]$, et que F est de classe C^1 sur $[a,b]$, et exprimer $F'(X)$.

b) Justifier (à l'aide du cours, sans redémontrer) que la fonction $y \mapsto \int_a^X f(x,y)\,dx$ est continue sur $[c,d]$, et que G est de classe C^1 sur $[a,b]$, et exprimer $G'(X)$.

c) En déduire que $F(b) = G(b)$, ce qu'on voulait démontrer.

1.2 Les chemins sur la sphère : la question du chemin le plus court (2 pts)

1.2.1 Un chemin sur la sphère et sa longueur

On considère deux fonctions de classe C^1 à valeurs réelles

$$\theta : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \theta(t), \qquad \text{et} \qquad \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(t),$$

et

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

avec

$$x(t) = R\cos\theta(t)\sin\varphi(t), \quad y(t) = R\sin\theta(t)\sin\varphi(t), \quad z(t) = R\cos\varphi(t).$$

a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est un point de la sphère $\mathcal{S}(O,R)$, d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Le chemin $\gamma([0,1])$ est donc tracé sur cette sphère.

b) Comme pour les chemins plans, la longueur du chemin γ est donnée par la formule

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Vérifier que on a

$$L(\gamma) = R\int_0^1 \sqrt{\varphi'(t)^2 + \theta'(t)^2 \sin^2\varphi(t)}\,dt.$$

1.2.2 Un chemin le plus court entre 2 points particuliers

On considère le pôle Nord : le point N de coordonnées $(0,0,R)$, et le point M de coordonnées $(R,0,0)$. On considère un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de la forme

$$\gamma(t) = (R\cos\theta(t)\sin\varphi(t), R\sin\theta(t)\sin\varphi(t), R\cos\varphi(t))$$

avec $\theta, \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et tels que γ joint N à M : on suppose que

$$\theta(0) = 0 \text{ et } \varphi(0) = 0, \quad \text{de sorte que} \quad \gamma(0) = N,$$

et

$$\theta(1) = 0 \text{ et } \varphi(1) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{de sorte que} \quad \gamma(1) = M.$$

a) Calculer

$$\int_0^1 R\varphi'(t)\,dt,$$

et en déduire que

$$L(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}R.$$

b) Déterminer un chemin particulier de longueur $\frac{\pi}{2}R$ qui joint N à M.

(Remarque : la suite logique serait de déterminer *tous* les chemins de longueur $\frac{\pi}{2}R$ qui joignent N à M.)

2 Équations différentielles (4,5 pts)

2.1 Une équation différentielle scalaire non linéaire d'ordre 1 (3 pts)

On considère le problème de Cauchy

$$r'(t) = r(t)(1 - r(t)^2), \quad \text{et} \quad r(0) = r_0. \tag{1}$$

a) Trouver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que le problème s'écrit

$$r'(t) = f(r(t)), \quad \text{et} \quad r(0) = r_0. \tag{2}$$

b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ? si oui, que permet-il de dire ?

c) Déterminer les points d'équilibre du problème (c'est-à-dire les solutions de $f(x) = 0$).

d) Étudier le comportement de la solution quand $r_0 \in]0,1[$: préciser l'intervalle d'existence de la solution, si elle est monotone ou pas (et si oui, quelle monotonie), si elle a des limites ou pas, et si oui lesquelles.

2.2 Un système d'équations différentielles scalaires linéaires d'ordre 1 (1,5 pts)

Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

a) Déterminer la solution $(x(t), y(t))$.

Indication : on peut le traiter sous la forme de système, mais ce qui est plus rapide ici est

— ou de calculer $x''(t)$ et d'en déduire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 pour $x(t)$, la résoudre (en utilisant les conditions initiales), et en déduire $y(t)$,

— ou alors de considérer la fonction (à valeurs complexes) $z(t) = x(t) + iy(t)$, et de trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par $z(t)$, la résoudre (en utilisant les conditions initiales) et en déduire $x(t)$ et $y(y)$.

b) On fixe $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Expliquer quelle est la trajectoire dans le plan $(0xy)$ décrite par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ quand le temps t varie de 0 à $+\infty$.

3 Calcul différentiel (13 pts)

3.1 Courbe paramétrée (5 pts)

On considère

$$x, y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2},$$

et on souhaite tracer la courbe paramétrée $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)), t \in]0, +\infty[\}$:

a) Calculer $x'(t)$, $y'(t)$ et établir le double tableau de variations sur $]0, +\infty[$.

b) Étude locale près du point singulier $M(1)$: préciser un vecteur dirigeant la tangente en ce point, et le comportement local (point d'inflexion ? de rebroussement de première espèce ? de deuxième espèce ?).

c) Étude de la branche infinie quand $t \to +\infty$: quand $t \to +\infty$, déterminer une droite asymptote, et étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

d) Étude de la branche infinie quand $t \to 0^+$: quand $t \to 0^+$, déterminer un équivalent simple de $x(t)$ et $y(t)$, et calculer $\lim_{t \to 0^+} y(t) - \frac{1}{4}x(t)^2$: que peut-on en déduire graphiquement ?

e) Tracé de la courbe : tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$, en vous aidant de ce qui a été étudié dans les questions précédentes.

3.2 Question de cours (1 pt)

Soit $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}.$$

On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathcal{C}$ tel que G admet un maximum local en (a, b) sur $\mathcal{C}$, c'est-à dire :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C} \text{ et proche de } (a, b), \quad G(x, y) \leq G(a, b).$$

Énoncer (sans le démontrer) le théorème d'optimisation sous contrainte : compléter la phrase "si G admet un maximum local en (a, b) sur $\mathcal{C}$, alors..."

3.3 Optimisation sans contrainte en dimension 2 (2 pts)

On considère $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a) Déterminer les points critiques de F sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à dire les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

b) Écrire la matrice hessienne au point $(1, 1)$ et en déduire la nature de ce point (point de minimum local ? de maximum local ? point selle ? autre ?)

3.4 Optimisation sous une contrainte (3 pts)

On considère $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)$, et

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, F(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0\}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ s'appelle la "lemniscate de Bernoulli".

a) Montrer que

$$(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x^2+y^2)^2 \leq x^2+y^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \leq 1,$$

et en déduire que la lemniscate de Bernoulli est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

b) On considère $G(x,y) = y$. Justifier que G atteint son maximum sur $\mathcal{C}$, et déterminer la valeur de ce maximum, à l'aide du théorème d'optimisation sous contrainte (partie 3.2).

3.5 Questions sur et sous une surface de $\mathbb{R}^3$ (2 pts)

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x + y^2$, et la surface

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z), z = f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

a) Déterminer le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point $(0,0,0)$, et la position relative de la surface par rapport à son plan tangent (au dessus ? en dessous ?).

b) On considère

$$\mathcal{B} = \{(x,y,z), (x,y) \in [0,2] \times [0,1], 0 \leq z \leq f(x,y)\},$$

et

$$\mathcal{B}' = \{(x,y,z), (x,y) \in [0,2] \times [0,1], 0 \leq z \leq x\}.$$

Quelle relation d'inclusion a-t-on entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$? Calculer le volume de $\mathcal{B}'$ et le volume de $\mathcal{B}$.