UNIVERSITÉ PAUL SABATIER 2017-2018
L3 ESR MESURE ET PROBABILITÉS

Contrôle Terminal

mai 2018
Aucun document. Pas de calculatrice.

1. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des v.a. i.i.d de loi exponentielle de parmètre λ. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $\theta = \lambda^{-1}$.

   (a) Montrer que $\overline{X}_n$ est une v.a. indépendante de $X_{n=1}$.

   (b) Montrer par récurrence sur n que $n\overline{X}_n$ est une v.a. de loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue
   $$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

   (c) Calculer la moyenne et la variance de X_1.

   (d) Proposer un estimateur de θ par la méthode des moments. Qu'est-ce qui assure qu'il est consistant ? Est-il sans biais? Calculer son risque quadratique.

   (e) Montrer que pour tout $t > 0$,
   $$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \theta| \geq t) \leq \frac{\theta}{nt^2}.$$

   (f) Calculer un intervalle de confiance au nieveau de comfiance α de θ pour $\alpha n > 1$.

   (g) Donner une mesure dominante du modèle statistique associé et la vraisemblance associée.

   (h) Proposer un estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

2. Soit $(X_i)_i$ et N des v.a. à valeur entière mutuellement indépendantes. On suppose de plus que X_n a pour génératrice G_X pour tout n et on note G_N la fonction génératrice de N. On note $S = \sum_{i=1}^N X_i$ avec comme convention que $\sum_{i=1}^0 = 0$.

   (a) Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. Montrer que $\lim_{s\to 1, s<1}\sum_{n=1}^\infty u_n s^n = \sum_{n=1}^\infty u_n$.

   (b) Montrer que S est une v.a., à valeur entière et calculer sa fonction génératrice en fonction de G_X et G_N.

   (c) Soit $1 > \alpha > 0$. Montrer que $G(s) = 1-(1-s)^\alpha$ est la fonction génératrice d'une v.a. à valeur entière dont on déterminera la loi. Il s'agit de la loi de Sibuya de paramètre α. On pourra introduire
   $$L_N(u,n) = \frac{u}{n}[1-\frac{u}{n-1}]....[1-u].$$

   (d) On suppose que X_1 suit une loi de Sibuya de paramètre α et N une loi de Sibuya de paramètre β. En déduire la loi de S.

3. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}([-1,1])$.

   (a) Montrer que $X+Y$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on calculera.

   (b) Calculer la transformée de Fourier de X. En déduire celle de $X+Y$.

   (c) Montrer que $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

4. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes de fonctions de répartition F_n. Montrer que $(X_n)_n$ converge vers 0 presque surement si et seulement si pour tout ε la série $\sum_n (1-F_n(\varepsilon-)_n + F_n(-\varepsilon_n)$ est convergente.