Examen de Géométrie 1 - session 2

durée : 3 h

Exercice 1 : vrai ou faux ?

Chaque fois, une justification de la réponse est attendue !

VF 1. Si F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors on a l'égalité $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

VF 2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

VF 3. Si $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est une famille libre et x un vecteur non nul de E, la famille $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{x\}$ est liée si, et seulement si, $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

VF 4. Deux matrices qui ont même polynôme caractéristique sont semblables.

VF 5. Deux matrices qui ont même polynôme minimal sont semblables.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que (avec $f^2 = f \circ f$) :

1. $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f \supset \mathrm{Ker}\, f^2$
2. $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$

Exercice 3

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3) et du produit scalaire canonique. Soit $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ de matrice :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$$

1. a. Montrer que φ est une isométrie.

b. Montrer que $\varphi = r \circ s$ où r est une rotation d'angle θ et d'axe une droite Δ et s une symétrie orthogonale par rapport au plan $\Delta^\perp$. Expliciter la droite Δ et l'angle θ.

c. Donner une matrice orthogonale P telle que :

$${}^tP\,A\,P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Écrire M_1 la matrice de p_D, la projection orthogonale sur la droite D.

b. Écrire M_2 la matrice de $p_{D^\perp}$, la projection orthogonale sur le plan $D^\perp$.

c. Écrire M_3 la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $X \mapsto n \wedge X$ pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

d. Calculer $M = -M_1 + \cos\theta\, M_2 + \sin\theta\, M_3$ où θ est l'angle trouvé dans la question 1.b.
Comparer avec A et justifier le résultat obtenu.

Exercice 4

Soit $(E, < \, , \, >)$, un espace vectoriel euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection sur F, parallèlement à G. Le but de cet exercice est de montrer que p est une projection orthogonale (i.e., $G = F^{\perp}$) si, et seulement si, $||p(x)|| \leq ||x||$, pour tout x de E.

1. On suppose dans cette question que p est une projection orthogonale. Montrer que $||p(x)|| \leq ||x||$, pour tout x de E.

2. On suppose à présent que $||p(x)|| \leq ||x||$, pour tout x de E.

   a. Soit $(f, g) \in F \times G$. Que vaut $p(x)$? En déduire que

$$\forall \, t \in \mathbb{R} \, , \qquad t^2 \, ||g||^2 \, + \, 2t \, < f, g > \, \geq \, 0$$

(on pourra considérer $x = f + \, t \, g$).

   b. Déduire des variations du polynôme (pour $(f, g) \in F \times G$ fixé) $P(t) = t^2 ||g||^2 + 2t < f, g >$ que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

   c. Conclure que p est une projection orthogonale.

BARÈME APPROXIMATIF : 5 - 4 - 7 - 4

Correction de l'examen de Géométrie 1

Exercice 1 : vrai ou faux ?

VF 1. FAUX. Il suffit de considérer $E = \mathbb{R}^2$ (le plan réel), G engendré par e_1 (l'axe des abscisses), H engendré par e_2 (l'axe des ordonnées) et F engendré par $e_1 + e_2$ (la « bissectrice ») pour conclure que l 'égalité $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$ est fausse puisque, dans cet exemple, $G + H = E$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ et donc $F \cap (G+H) = F$ tandis que $(F \cap G)+(F \cap H) = \{0\}$ (dans cet exemple, on peut remplacer F par n'importe quelle droite vectorielle autre qu'un axe de coordonnées).

On notera que l'inclusion $(F \cap G)+(F \cap H) \subset F \cap (G+H)$ est toujours vraie. En effet, si $x = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F \cap G$ et $f_2 \in F \cap H$, alors on a bien $x \in F \cap (G + H)$ puisque $f_1 + f_2 \in F$ (car F est stable pour l'addition) et $f_1 + f_2 \in G + H$ (car $f_1 \in G$ et $f_2 \in H$).

VF 2. VRAI. Il est clair que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ est un sous-espace vectoriel de E. Pour montrer la réciproque, on va montrer la contraposée et donc supposer que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Soit alors $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$. On a alors bien entendu $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$ et il suffit de vérifier que $f + g \notin F \cup G$ pour conclure que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. De fait, si $f + g$ était dans $F \cup G$, on aurait $f + g \in F$ ou $f + g \in G$. Mais $f + g \in F$ entraîne $g = (f + g) - f \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel), ce qui contredit $g \in G \setminus F$; et si on suppose $f + g \in G$, on aboutit de même à $f \in G$ qui contredit $f \in F \setminus G$.

VF 3. VRAI. Si $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, il est clair que la famille $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{x\}$ est liée (car de la combinaison linéaire $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, on tire la combinaison linéaire nulle avec coefficients non tous nuls $x - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$). Réciproquement, s'il existe une combinaison linéaire nulle avec coefficients non tous nuls $\lambda x - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$, alors $x = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (on sait que $\lambda \neq 0$ car $\lambda = 0$ entraînerait que l'on a la combinaison linéaire nulle avec coefficients non tous nuls $\lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$, ce qui contredirait le fait que la famille $\mathcal{F}$ est libre).

VF 4. FAUX. Deux matrices qui ont même polynôme caractéristique ne sont pas forcément semblables comme le montre l'exemple des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices ont le même polynôme caractéristique $C(X) = (X - 1)^2$ et, pour toute matrice inversible P, $PAP^{-1} = A = \mathrm{I}_2 \neq B$, ce qui montre que B et A ne peuvent pas être semblables.

VF 5. FAUX. Deux matrices qui ont même polynôme minimal ne sont en général pas semblables. En fait, bien souvent, cette question n'a pas de sens car, par exemple, $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même polynôme minimal $X - 1$ mais ne sont évidemment pas semblables !

Exercice 2

1. $\Longrightarrow$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$. On a donc $f^2(x) = 0$, ce qui montre que $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, $f(x)$ est dans $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$, i.e. $f(x) = 0$ et on conclut bien que $x \in \mathrm{Ker}\, f$.

$\Longleftarrow$ Soit $z \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Ainsi, $f(z) = 0$ et il existe un y dans E tel que $z = f(y)$. On a donc $f^2(y) = f(f(y)) = f(z) = 0$, i.e. $y \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Puisque $\mathrm{Ker}\, f \supset \mathrm{Ker}\, f^2$, on en déduit que $y \in \mathrm{Ker}\, f$, soit encore $z = f(y) = 0$ et on a montré que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

2. $\Longrightarrow$ Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et puisque $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $f(x_1) = 0$ et $x_2 = f(z)$ pour un $z \in E$. Ainsi, $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f^2(z) \in \mathrm{Im}\, f^2$.

$\Longleftarrow$ Soit $x \in E$. Comme $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$, il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. A présent, l'égalité $x = \big(x - f(y)\big) + f(y)$ montre que $x \in \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$ puisque $f(x - f(y)) = f(x) - f^2(y) = 0$ et $f(y) \in \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 3

1.a. On vérifie facilement que les vecteurs-colonnes de A sont normés ($1 = (9+1+6)/16 = (1+9+6)/16 = (6+6+4)/16$) et que le produit scalaire de deux vecteurs-colonnes distincts est nul. Ceci montre que A est une matrice orthogonale, i.e., que φ est une isométrie. On peut aussi vérifier que ${}^tAA = \mathrm{I}_3$.

1.b. La décomposition cherchée est celle d'une isométrie indirecte. De fait, le cofacteur de A_{11} est

$$\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = -A_{11}$$

ce qui montre que $\det\varphi = -1$, i.e., que φ est une isométrie indirecte. La droite Δ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1, soit, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$X \in \Delta \iff AX = -X \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ \sqrt{6}x - \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$$

Puisque $\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2\cos\theta$, on trouve $-1 + 2\cos\theta = 1/4 \times (-8) = -2$, soit encore $\cos\theta = -1/2$. La valeur de θ (modulo 2π) est donc $\pm 2\pi/3$ et pour lever l'indétermination entre ces deux valeurs, il suffit de connaître le signe de $\sin\theta$. Comme $e_1 \notin \Delta$, le signe de $\sin\theta$ est donné par le signe du produit mixte $[e_1, \varphi(e_1), u]$ où $u = (1,1,0)$ est pris comme vecteur qui oriente Δ et on conclut $\theta = -2\pi/3$ puisque

$$[e_1, \varphi(e_1), u] = \begin{vmatrix} 1 & -3/4 & 1 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{6}/4$$

1.c. La formule demandée est la formule classique de changement de base avec $P^{-1} = {}^tP$ si la matrice de passage P est choisie orthogonale. La première colonne $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de P est un vecteur directeur normé de Δ et les deux colonnes suivantes, c_2 et c_3, forment une base orthonormée du plan $\Delta^\perp$. Il faudra de plus que la base orthonormée (c_1, c_2, c_3) ainsi obtenue soit directe, i.e. que $c_1 \wedge c_2 = c_3$. Il est clair que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^\perp$. On pourra donc prendre $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a. Puisque n est normé, on sait que $p_D(e_1) = < e_1, n > n = \frac{1}{2} < (1,0,0), (1,1,0) > (1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0)$. De même, $p_D(e_2) = < e_2, n > n = \frac{1}{2} < (0,1,0), (1,1,0) > (1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0)$ et $p_D(e_3) = < e_3, n > n = \frac{1}{2} < (0,0,1), (1,1,0) > (1,1,0) = (0,0,0)$. Ainsi :

$$M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.b. Puisque $p_D + p_{D^\perp} = \mathrm{Id}$, on trouve :

$$M_2 = \mathrm{I}_3 - M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.c. On a $n \wedge X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z \\ -z \\ y - x \end{pmatrix}$ et par conséquent : $M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.d. On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le calcul de $M = -M_1 + M_2\cos\theta + M_3\sin\theta$ donne :

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

Les matrices M et A sont identiques. De fait, si $X_1 + X_2$ est la décomposition d'un vecteur X de $\mathbb{R}^3$ dans $\Delta \oplus \Delta^\perp$ (avec $X_1 \in \Delta$ et $X_2 \in \Delta^\perp$), on a $\varphi(X) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2)$, ce qui s'écrit encore $\varphi = \varphi \circ p_\Delta + \varphi \circ p_{\Delta^\perp}$. On sait alors (cf. cours) que $\varphi(X_1) = -X_1$ et que $\varphi(X_2) = \cos\theta \ X_2 + \sin\theta \ (n \wedge X_2)$. Par ailleurs, on a bien sûr $D = \Delta$, d'où $X_1 = p_D(X)$, $X_2 = p_{D^\perp}(X)$, $n \wedge X = n \wedge X_2$ (car $n \wedge X_1 = 0$) et l'écriture $-M_1 + \cos\theta\, M_2 + \sin\theta\, M_3$ est donc simplement la traduction matricielle de $\varphi = \varphi \circ p_\Delta + \varphi \circ p_{\Delta^\perp}$.

Exercice 4

1. Soit $x \in E$ et $(x_F, x_G) \in F \times G$, l'unique couple tel que $x = x_F + x_G$. Dire que p est une projection orthogonale équivaut à dire que $G = F^\perp$. Ainsi, $< x_F, x_G >= 0$ et, par le théorème de Pythagore, $||x||^2 = ||x_F||^2 + ||x_G||^2$. Mais $p(x) = x_F$ et on en déduit que $||p(x)||^2 = ||x||^2 - ||x_G||^2 \leq ||x||^2$, d'où $||p(x)|| \leq ||x||$ (avec égalité si, et seulement si, $x_G = 0$, soit encore , $x \in F$).

2.a. Soit $x = f + tg$ avec $(f, g) \in F \times G$ et t un réel quelconque. On sait alors que $||p(x)||^2 \leq ||x||^2$. Or, par définition de p, $p(x) = f$ et $||x||^2 = < f + tg, f + tg >= ||f||^2 + 2t < f, g > + t^2 \, ||g||^2$. L'inégalité $||x||^2 - ||p(x)||^2 \geq 0$ donne donc exactement l'inégalité demandée.

2.b. Soit $(f, g) \in F \times G$ fixé ; on peut supposer de plus que f et g sont tous deux non nuls (si ce n'est pas le cas, on note simplement qu'alors $< f, g >= 0$). Le polynôme $P(t) = t(t||g||^2 + 2 < f, g >)$ est toujours positif d'après la question 2.a. Comme il admet deux racines : 0 et $-2 < f, g > / \, ||g||^2$, cela signifie que ces deux racines n'en sont qu'une seule..., i.e. que $< f, g >= 0$. On a ainsi montré que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.c. On sait déjà que $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = \dim F + \dim G$ et donc que $\dim G = \dim F^\perp$. D'après la question précédente, $G \subset F^\perp$ et on peut conclure que $G = F^\perp$, i.e. que p est une projection orthogonale.