Contrôle Terminal du 15 mai 2018

(13h-16h)

Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.

Exercice 1.

(1) Trouver une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$) f vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| = e^{\operatorname{Im} z}.$$

(2) Déterminer toutes les fonctions entières g vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq e^{\operatorname{Im} z}.$$

Exercice 2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$.

(1) Justifier que f est holomorphe sur son domaine de définition et présente une singularité isolée en 0 dont on précisera la nature.

(2) Déterminer l'ensemble des zéros de la fonction sinus : $Z_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\}$. et en déduire l'ensemble Z des zéros de f.

(3) Déterminer l'ensemble des points d'accumulation de Z et expliquer le rapport avec le principe des zéros isolés.

Exercice 3. Soit

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a > 0$.

(1) Déterminer les singularités de f et calculer les résidus en ces points.

(2) Soit $R > 0$. Représenter le lacet Γ formé de la suite de chemins suivants :
- $\gamma_1(t) = t$ pour $t \in [-R, R]$
- $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$ pour $t \in [0, 1]$.

(3) Calculer

$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

(4) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

(5) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx.$$

Exercice 4.

(1) Etablir la convergence de la suite de fonctions holomorphes $\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k}$ vers la fonction holomorphe $\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$ définie sur $C \setminus \mathbb{Z}$.

(2) En déduire que la fonction $f(z) = \pi\text{cotan}(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$ est une fonction entière. (On pourra étudier les singularités de f).

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note γ_n le lacet dont l'image est le bord orienté du carré $\gamma_n^* = \left\{x+iy \in \mathbb{C} \mid \sup\{|x|,|y|\} \leq n + \frac{1}{2}\right\}$. Représenter le lacet .

(4) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ tels que $2|z| < 2n+1$, $\int_{\gamma_n} \frac{1}{(u-k)(u-z)} du = 0$.

(5) En déduire avec la formule de Cauchy que

$$\pi\text{cotan}(\pi z) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi u)}{u-z} du.$$

On suppose la propriété notée $(*)$ suivante vraie :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u \in \gamma_n^* \implies |\text{cotan}(\pi u)| \leq M.$$

(6) Montrer qu'il existe une constante K telle que $|f(z)| \leq K$.

(7) Montrer que $K = 0$ en utilisant la propriété $(**)$ suivante : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(8) **(Bonus 1)** On se propose de montrer la propriété $(**)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (a) Calculer
   $$I_n = \int_{\gamma_n} \frac{\pi\text{cotan}(\pi z)}{z^2} dz.$$
   (b) En déduire $(**)$ en utilisant la majoration $(*)$

(9) **(Bonus 2)**On se propose dans cette dernière question de montrer la propriété $(*)$ c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si u appartient au lacet γ_n alors $|\text{cotan}(\pi u)| \leq M$.
   (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $2|y| \geq 1$. Montrer que :
   $$|\text{cotan}(\pi(x+iy))|^2 = \frac{\sinh(\pi y)^2 + \cos(\pi x)^2}{\sinh(\pi y)^2 + \sin(\pi x)^2} \leq |\text{cotanh}(\pi y)|^2,$$
   et en déduire que :
   $$|\text{cotan}(\pi(x+iy))| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$
   (b) Soient $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que $2|y| \leq 1$. Montrer que :
   $$\left|\text{cotan}\left(\pi\left(k + \frac{1}{2} + iy\right)\right)\right| \leq \tanh\frac{\pi}{2}.$$
   (c) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si z appartient au lacet γ_n alors $|\text{cotan}(\pi z)| \leq M$.