Université Paul Sabatier / L3ESR **vendredi 6 janvier 2017**

Examen de l'option Graphes

On rappelle que le soin apporté à la rédaction est de première importance !

Exercice 1

1. Soit $X = (V, E)$ un graphe. Donner (en la justifiant) une relation qui exprime $|E|$ en fonction des degrés $d(v)$ des sommets $v \in V$.

2.a. Montrer que, dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

2.b. Est-il vrai que si un graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors il existe un chemin connectant ces deux sommets ?

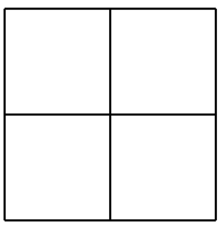
3. On suppose à présent que $X = (V, E)$ est un arbre connexe.

3.a. Rappeler une formule simple (on ne demande pas de la prouver) qui exprime $|E|$ en fonction de $|V|$.

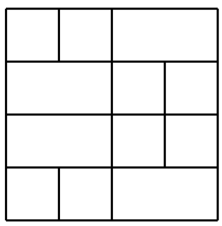
3.b. On rappelle qu'une feuille d'un arbre est un sommet de degré 1 et on note $\delta = \max_{v \in V} d(v)$. Utiliser les questions 1 et 3.a. pour montrer que X contient au moins δ feuilles (indication : considérer un sommet x_0 de degré δ et la partition $\{\mathcal{F}, \{x_0\}, W\}$ de V qu'il induit, en appelant $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de X).

Exercice 2

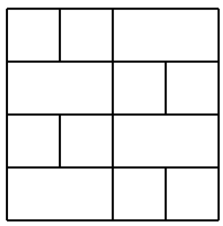
Pour chacun des trois dessins qui suivent, dire s'il est possible, sans lever la main (et sans repasser sur un trait déjà dessiné), de dessiner une courbe fermée qui traverse exactement une fois chacun des segments qui composent la figure (sachant que chaque croisement délimite un nouveau segment : les dessins D_1, D_2 et D_3 possèdent respectivement 12, 33 et 34 segments). Et si l'on enlève la condition que la courbe soit fermée, cela change-t-il quelque chose ?



Dessin D_1



Dessin D_2



Dessin D_3

Pour répondre à ces deux questions, pour chaque dessin D_i, on explicitera un graphe X_i qui permet d'y répondre et, lorsqu'elles existent, on dessinera des courbes qui illustrent ces réponses.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le graphe complet K_n admet $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens.

2. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Combien de cycles hamiltoniens peut-on trouver dans un graphe biparti complet $K_{m,n}$?

Exercice 4

Soit $X = (V, E)$ un graphe simple (i.e. sans boucles, ni multi-arêtes). Cet exercice est autour du Théorème de Mantel qui affirme que, si X est sans triangle (i.e. sans K_3 induit), alors on a l'inégalité

$$(\star) \qquad\qquad |E| \leq \frac{|V|^2}{4}$$

(ce résultat a déja été vu en TD mais on va le prouver ici par d'autres méthodes).

1. Montrer les inégalités suivantes :

   1.a. $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

   1.b. $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{n}$.

2. Dans cette question, on considère un graphe $X = (V, E)$ simple et sans triangle. On se donne un sommet x de X de degré δ maximal (i.e. $\delta = \max_{v \in V} d(v)$) et, pour tout sommet u, on note $N(u)$ l'ensemble des sommets adjacents à u

   2.a. Montrer que $N(x)$, pris comme sous-graphe induit de X, est un stable (i.e., ne contient aucune arête).

   2.b. En déduire que $|E| \leq \displaystyle\sum_{v \not\sim x} d(x)$ (où $v \not\sim x$ signifie que v est x ne sont pas adjacents) puis que $|E| \leq \delta(|V| - \delta)$.

   2.c. Conclure que l'on a l'inégalité $(\star)$.

3. Dans cette question, on considère un graphe simple $X = (V, E)$, à n sommets et e arêtes.

   3.a. Si a et b sont deux sommets adjacents de X, montrer qu'il y a au moins $d(a) + d(b) - n$ triangles de X qui contiennent l'arête $\{a, b\}$.

   3.b. Montrer que $\displaystyle\sum_{\{a,b\} \in E(X)} (d(a) + d(b) - n) = \left(\sum_{v \in V(X)} d(v)^2 \right) - ne.$

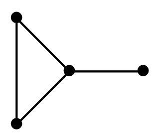
   3.c. Montrer que $\displaystyle\sum_{\{a,b\} \in E(X)} (d(a) + d(b) - n) \geq \frac{e(4e - n^2)}{n}$

   3.d. Conclure que $T \geq \dfrac{e(4e - n^2)}{3n}$ en appelant T le nombre de triangles de X.

   3.e. En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité $(\star)$.

4. Donner un graphe pour lequel $|E| = \dfrac{|V|^2}{4}$

5. ($\circledast\,\circledast\,\circledast\circledast$) Soit $X = (V, E)$ un graphe simple tel que $|V| \geq 4$. Le but de cette question est de montrer que si $|E| > \dfrac{|V|^2}{4}$, alors X contient un sous-graphe isomorphe à H où H est le graphe suivant :



   5.a. On suppose que l'on a l'inégalité $|E| > \dfrac{|V|^2}{4}$. Montrer que X contient un triangle et que, pour tout triangle $\{a, b, c\}$ dans X, si le triangle $\{a, b, c\}$ forme une composante connexe de X (i.e. $N(a) \cup N(b) \cup N(c) = \{a, b, c\}$), alors $|E'| > \dfrac{|V'|^2}{4}$ où $X' = (V', E')$ est le sous-graphe de X obtenu en enlevant les sommets a, b et c.

   5.b. Raisonner par récurrence sur $|V|$ pour en déduire que si $|V| \geq 4$ et si $|E| > \dfrac{|V|^2}{4}$, alors X contient un sous-graphe isomorphe à H (remarque : on prendra un pas de récurrence égal à 3).

Barème approximatif : 4 - 4 - 3 - 9 + 4

Exercice 1

1. Puisque $d(v)$ compte le nombre d'arêtes incidentes à v, $\sum_{v\in V} d(v)$ compte deux fois chacune des arêtes puisque toute arête est incidente à deux sommets et la relation demandée est $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$.

2.a. Puisque $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$, $\sum_{v\in V} d(v) \equiv 0 \bmod 2$ et cela montre bien que le nombre de sommets de degré impair est pair car $|\{v,\ d(v) \text{ impair}\}| \equiv \sum_{v\in V,\ d(v)\ \text{impair}} d(v) \bmod 2 \equiv \sum_{v\in V} d(v) \equiv \bmod 2$.

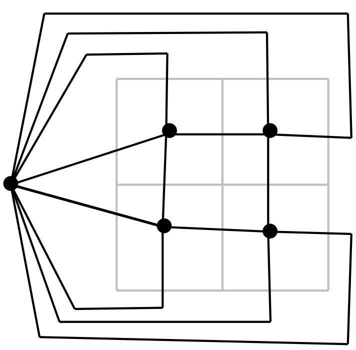
2.b. Oui, si un graphe contient exactement deux sommets de degré impair, alors il existe un chemin connectant ces deux sommets. En effet, si ce n'était pas le cas, ces deux sommets ne seraient pas dans la même composante connexe et toute composante connexe qui contiendrait l'un de ces deux sommets serait donc un graphe qui contiendrait un seul sommet de degé impair, ce qu'on sait être impossible d'après la question 2.a.

3.a. On sait que si $X = (V, E)$ est un arbre connexe, alors $|E| = |V| - 1$.

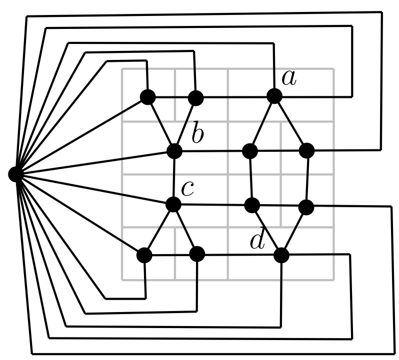
3.b. Soit un sommet x_0 tel que $d(x_0) = \delta = \max_{v\in V} d(v)$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de X et $W = V \setminus (\mathcal{F} \cup \{x_0\})$. D'après les questions 1. et 3.a, on a $2(|V| - 1) = 2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = d(x_0) + \sum_{v\in\mathcal{F}} d(v) + \sum_{v\in W} d(v) = \delta + |\mathcal{F}| + \sum_{v\in W} d(v) \geq \delta + |\mathcal{F}| + 2|W|$, où la dernière inégalité découle du fait que $d(v) \geq 2$ pour tout sommet qui n'est pas dans $\mathcal{F}$ (on utilise ici la connexité de X pour être sûr qu'il n'existe pas de sommet de degré 0). Comme $|W| = |V| - |\mathcal{F}| - 1$, on obtient $2(|V| - 1) \geq \delta + |\mathcal{F}| + 2(|V| - |\mathcal{F}| - 1)$, soit encore $0 \geq \delta - |\mathcal{F}|$, i.e. $|\mathcal{F}| \geq \delta$.

Exercice 2

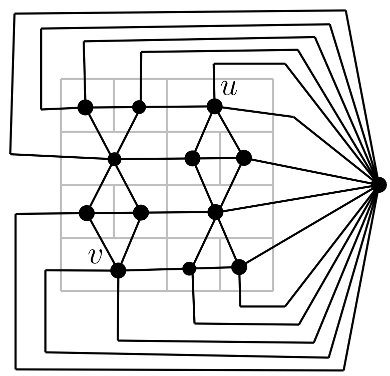
A chaque dessin D_i, on associe le graphe X_i possédant autant de sommmets que le dessin possède de polygones de périmètre minimal (i.e. des polygones qui ne contiennent pas un polygone de périmètre strictement plus petit) auxquels on ajoute un sommet représentant « l'extérieur » du dessin (sa face « infinie »). Ainsi, $|V(X_1)| = 4 + 1 = 5$, $|V(X_2)| = |V(X_3)| = 12 + 1 = 13$. Deux sommets de X_i sont adjacents si, et seulement si, les polygones qu'ils représentent ont un côté en commun.



graphe X_1



graphe X_2



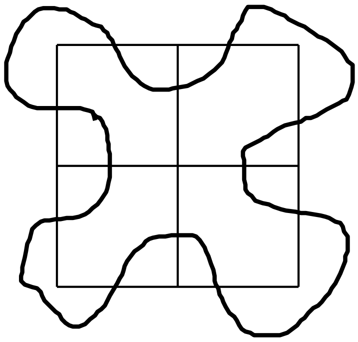
graphe X_3

On note alors que dessiner, sans lever la main et sans repasser sur un trait déjà dessiné, une courbe fermée qui traverse exactement une fois chacun des segments qui composent le dessin D_i équivaut à parcourir un circuit eulérien dans le graphe X_i. Une telle courbe existe donc si, et seulement si, X est eulérien. Si l'on n'impose pas que la courbe soit fermée, cela revient à demander qu'il existe une chaîne eulérienne (i.e. à demander que le graphe soit semi-eulérien).

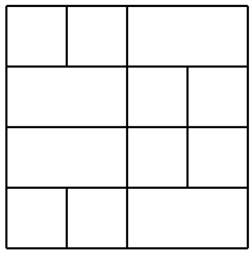
Tous les sommets de X_1 étant de degré pair (4 sommets de degré 4 et un sommet de degré 8), X_1 est eulérien et on peut tracer sans lever la main de courbe fermée qui traverse une seule fois chacun des segments de D_1.

Le graphe X_2 possède 4 sommets de degré 5 (les sommets a, b c et d sur les représentations graphiques) ; il n'est donc pas semi-eulérien (ni, a fortiori, eulérien) et on ne peut pas tracer sans lever la main une courbe qui traverse une seule fois chacun des segments de D_2.

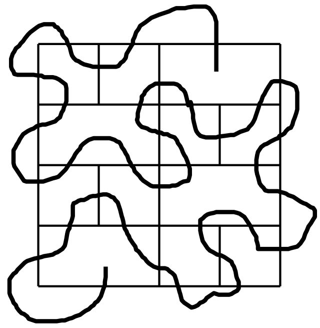
Le graphe X_3 a exactement 2 sommets de degré impair (de degré 5, ce sont les sommets u et v sur les représentations graphiques), il est donc semi-eulérien et on peut donc tracer sans lever la main une courbe (non fermée) qui traverse une seule fois chacun des segments de D_3.



cas eulérien



cas non semi-eulérien



cas semi-eulérien et non eulérien

Exercice 3

1. Puisque tout sommet de K_n est adjacent à tout autre sommet de K_n, il y a autant de cycles hamiltoniens dans K_n que de façons d'ordonner cycliquement les n sommets sans tenir compte du sens dans lequel on parcourt cet ordre cyclique. Il y a $n!$ ordres linéaires qui ne font plus que $(n-1)!$ ordres cycliques et, finalement, $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens puisqu'on ne tient pas compte du sens dans lequel on parcourt un cycle donné (par exemple, pour $n = 5$, $\ldots -2-4-5-3-1-2-4- \ldots$ et $\ldots -2-1-3-5-4-2-1-3- \ldots$ décrivent le même cycle).

2. Soit $K_{m,n} = (V(K_{m,n}), E(K_{m,n}))$. On sait que $V(K_{m,n}) = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m$, $|B| = n$ et $E(K_{m,n})) = \{\ \{a, b\},\ a \in A, b \in B\}$. Un chemin $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans $K_{m,n}$ alterne nécessairement un élément de A avec un élément de B, i.e. si x_i est dans A (resp. dans B) alors x_{i+1} est dans B (resp. dans A). Pour avoir un cycle, il faut de plus que $x_0 = x_k$ et cela implique que k est pair et que le chemin passe par $k/2$ sommets de A et $k/2$ sommets de B.

On en déduit que $K_{m,n}$ n'est pas hamiltonien (i.e. ne contient aucun cycle hamiltonien) si $m \neq n$.

Si $m = n$, un cycle hamiltonien dans $K_{n,n}$ est donc donné par une suite $2n$-périodique de motif

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n$$

avec $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Par cyclicité, on peut fixer $a_1 \in A$, il reste $(n-1)!$ choix distincts pour les autres a_i et $n!$ choix pour la suite des b_i. Il faut encore diviser par 2 le nombre obtenu car tout cycle se lit dans deux sens. Le nombre de cycles hamiltoniens dans le graphe biparti complet $K_{n,n}$ est donc $\dfrac{(n-1)!\,n!}{2}$

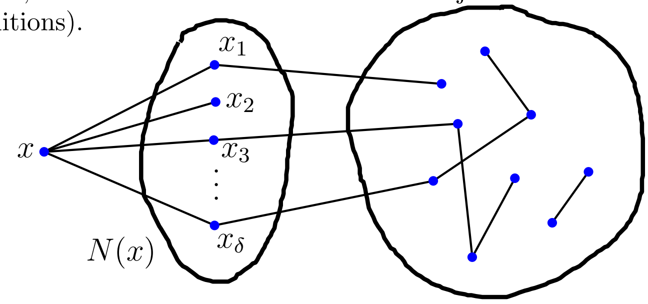
Exercice 4

1. Les deux inégalités sont des conséquences de l'inégalité $(a-b)^2 \geq 0$. C'est clair pour 1.a. puisque $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4} \iff (a+b)^2 - 4b \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$. Pour 1.b., l'inégalité cherchée découle de :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left((n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j\right) = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

2.a. Soient $u, v \in N(x)$. Par définition de $N(x)$, on a donc $x \sim u$ et $x \sim v$; ainsi, si on avait également $u \sim v$, l'ensemble $\{x, u, v\}$ formerait un triangle. Ceci est impossible puisque X est sans triangle et on a donc montré que $N(x)$, pris comme sous-graphe induit de X, est un stable (i.e., ne contient aucune arête).

2.b. Puisque $N(x)$ est un stable, une arête est soit incidente à x, soit incidente à un sommet non adjacent à x (et ne peut bien entendu pas vérifier simultanément ces deux conditions).



Par conséquent, $|E| \leq |N(x)| + \sum_{v \not\sim x,\, v \neq x} d(v)$, soit encore $|E| \leq \sum_{v \not\sim x} d(v)$. Puisque $d(v) \leq d(x)$ pour tout sommet v, on en déduit $|E| \leq \sum_{v \not\sim x} d(x) = \delta(|V| - \delta)$ car il y a $|V| - \delta$ sommets non adjacents à x.

2.c. D'après 1.a., $|E| \leq \delta(|V| - \delta) \leq \dfrac{(\delta + (|V| - \delta))^2}{4} = \dfrac{|V|^2}{4}$, ce qui donne bien l'inégalité $(\star)$.

3.a. Soient a et b deux sommets adjacents de X et soit $T(a, b)$ le nombre de triangles de X qui contiennent l'arête $\{a, b\}$. On a $d(a) = |N(a)|$, $d(b) = |N(b)|$ et $|N(a) \cap N(b)| = |N(a)| + |N(b)| - |N(a) \cup N(b)| = d(a) + d(b) - |N(a) \cup N(b)|$. L'ensemble $\{a, b, v\}$ est un triangle si, et seulement si, $v \in N(a) \cap N(b)$ (i.e. si, et seulement si v est voisin de a et de b). On a donc $T(a, b) = |N(a) \cap N(b)| = d(a) + d(b) - |N(a) \cup N(b)| \geq d(a) + d(b) - n$ puisque $|N(a) \cup N(b)| \leq |E| = n$.

3.b. Soit v un sommet de X. Dans la somme $\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} (d(a)+d(b)-n)$, $d(v)$ apparaît pour chaque arête à laquelle v est incident ; il apparaît donc $d(v)$ fois. Quant au nombre n, il appraît autant de fois qu'il y a d'arêtes, soit e fois. Ainsi, on a bien $\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} (d(a)+d(b)-n) = \left(\sum_{v\in V(X)} d(v)^2\right) - ne.$

3.c. D'après 1.b, $\sum_{v\in V(X)} d(v)^2 \geq \frac{\left(\sum_{v\in V(X)} d(v)\right)^2}{n}$ et, sachant que $2e = \sum_{v\in V(X)} d(v)$, on a $\displaystyle\sum_{v\in V(X)} d(v)^2 \geq \frac{4e^2}{n}$.

D'après 3.b, on obtient donc $\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} (d(a)+d(b)-n) = \left(\sum_{v\in V(X)} d(v)^2\right) - ne \geq \frac{4e^2}{n} - ne = \frac{e(4e-n^2)}{n}.$

3.d. On remarque que $T = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} T(a,b)$ puisque dans $\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} T(a,b)$, chaque triangle est compté 3 fois et, en tenant compte de 3.a et 3.c, on obtient $T = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E(X)} T(a,b) \geq \dfrac{1}{3}\sum_{\{a,b\}\in E(X)} d(a)+d(b)-n \geq \frac{e(4e-n^2)}{3n}$.

3.e. Si X est sans triangle, alors $T=0$ et l'inégalité de la question 3.d. devient $\dfrac{e(4e-n^2)}{3n} \leq 0$, soit encore $4e - n^2 \leq 0$. On en déduit $e \leq \dfrac{n^2}{4}$ qui est exactement l'inégalité $(\star)$ $\quad |E| \leq \dfrac{|V|^2}{4}$.

4. Si $X = K_{n,n}$ (graphe biparti complet), alors $|V| = 2n$, $|E| = n\times n = n^2$ et on a $|E| = n^2 = \dfrac{(2n)^2}{4} = \dfrac{|V|^2}{4}$.

5.a. D'après $(\star)$, si X vérifie l'inégalité $|E| > \dfrac{|V|^2}{4}$, alors X contient un triangle. Soit à présent un triangle $\{a,b,c\}$ qui forme une composante connexe de X. On a alors $|V'| = |V| - 3$, $|E'| = |E| -$ et

$$|E'| = |E| - 3 > \frac{|V|^2}{4} - 3 = \frac{|V|^2 - 12}{4} \geq \frac{(|V|-3)^2}{4} = \frac{|V'|^2}{4}$$

où la dernière inégalité vient de $|V|^2 - 12 \geq (|V|-3)^2 \iff -12 \geq -6|V| + 9 \iff |V| \geq 21/6 = 7/2$ (ce qui est vrai puisque $|V| \geq 4$).

5.b. La remarque-clé est que si un graphe contient un triangle qui n'est pas « isolé » (i.e. un triangle qui ne forme pas une composante connexe), alors X contient un sous-graphe isomorphe à H.

Raisonnons par récurrence sur $|V| = n$. Pour chaque n, on se donne un graphe $X = (V,E)$ qui vérifie $|E| > |V|^2/4$. Il possède donc un triangle $\{a,b,c\}$ et on appelle X' le sous-graphe obtenu en enlevant a, b et c. On sait que X' a 3 sommets de moins que X.

L'initialisation de cette récurrence se fait en vérifiant que la propriété cherchée est vraie pour $n \in \{4,5,6\}$.

Pour $n=4$, la condition $|E| > n^2/4 = 4$ dit qu'on a au moins 5 arêtes. Si le triangle $\{a,b,c\}$ était isolé, on aurait au moins 2 arêtes avec l'unique sommet de X' (absurde). Donc X contient un sous-graphe isomorphe à H.

Pour $n=5$, la condition $|E| > n^2/4 = 25/4$ dit qu'on a au moins 7 arêtes. Si le triangle $\{a,b,c\}$ était isolé, on aurait au moins 4 arêtes avec les deux sommets de X' (absurde). Donc X contient un sous-graphe isomorphe à H.

Pour $n=6$, la condition $|E| > n^2/4 = 9$ dit qu'on a au moins 10 arêtes. Si le triangle $\{a,b,c\}$ était isolé, on aurait au moins 6 arêtes avec les trois sommets de X' (absurde). Donc X contient un sous-graphe isomorphe à H.

L'hypothèse de récurrence est à présent que la propriété demandée est vraie pour tout graphe possédant un nombre de sommets compris entre 4 et n pour un $n \geq 6$ et soit $X = (V,E)$ vérifiant l'inégalité $|E| > \dfrac{|V|^2}{4}$ avec $|V| = n+1$. On prend un triangle $\{a,b,c\}$ contenu dans X. Si ce triangle n'est pas isolé, alors X contient un sous-graphe isomorphe à H. Sinon, on considère X' obtenu à partir de X en enlevant les sommets a, b et c. D'après 5.a., X' vérifie l'inégalité $|E'| > \dfrac{|V'|^2}{4}$ et contient un sous-graphe isomorphe à H d'après l'hypothèse de récurrence. C'est donc aussi vrai pour le graphe X (dont X' est un sous-graphe).