Université Paul Sabatier juin 2017
L3 ESR

EXAMEN DE TOPOLOGIE session 2 (3h)

Il est demandé de bien justifier toutes les arguments utilisés.

Question de cours On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des applications continues de X dans F, où X est un espace compact , (F, d) est un espace métrique. Montrer que si (F, d) est complet alors $\mathcal{C}(X, F)$ est un espace complet. On précisera la métrique sans justifier que c'est une métrique.

Exercice 1. 1) Rappeler la définition d'un ensemble dense dans un espace X, ainsi que la propriété de Baire.

2) Donner des exemples d'espaces possédant la propriété de Baire (sans démonstration).

3) Donner un exemple d'intersection non dénombrable d'ouverts denses qui n'est pas dense.

On se propose maintenant de montrer que tout fermé $F \subset \mathbb{R}$ dénombrable et non vide a au moins un point isolé.

4) Rappeler la définition d'un point isolé de F.

5) Montrer que si $x \in F$ n'est pas un point isolé alors $\Omega_x = F \setminus \{x\}$ est un ouvert dense dans F.

6) Montrer qu'un sous ensemble fermé dans un espace complet est complet.

7) En déduire que tout fermé de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de Baire.

8) Conclure.

9) En déduire que le Cantor triadique n'est pas dénombrable.

Exercice 2. Soit K un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer que K est fermé et borné. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 3. Dans tout cet exercice K désigne un compact et $f : K \to K$ une application. Soit $Fix(f) = \{x \in K \mid f(x) = x\}$. On considère G un ensemble d'applications continues de K dans K qui commutent $(\forall f, g \in G,\ f \circ g = g \circ f)$.

1) Montrer que si $f \in G$ alors $Fix(f)$ est compact.

2) En déduire que :

$$\left(\forall A \subset G \ \text{ finie } \bigcap_{f \in A} Fix(f) \neq \emptyset \right) \implies \bigcap_{f \in G} Fix(f) \neq \emptyset.$$

On suppose dans la suite que K est aussi convexe, qu'il est inclus dans E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et que tout élément $f \in G$ vérifie $f : E \to E$ est affine (i.e. $f = v + h$ où $v \in E$ est une constante et $h : E \to E$ est une application linéaire.)

3) Soit $C = (id - f)(K)$. Montrer que C est compact et convexe. (C est convexe s'il contient les barycentres à coefficients positifs des points de C).

4) Soit $x \in K$. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (id - f)(f^k(x))$ est dans C.

TOURNER LA PAGE SVP

5) Montrer que $x_n \to 0$ (on pourra simplifier l'expression et utiliser l'exercice 2).

6) En déduire que $K_1 = Fix(f)$ est non vide.

7) Montrer que K_1 est convexe et stable par tout $g \in G$ (cad $g(K_1) \subset K_1$).

8) Soit $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ des éléments de G. Montrer que $Fix(f_1) \cap Fix(f_2) \cap ... \cap Fix(f_k) \neq \emptyset$ (par récurrence).

9) En déduire que toutes les applications de G ont un point fixe commun dans K c'est-à-dire que

$$\bigcap_{f \in G} Fix(f) \neq \emptyset.$$

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique compact. On se donne une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplement vers 0 et vérifie

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait équicontinue.

2) Énoncer le théorème d'Ascoli.

3) En déduire qu'il existe une sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers 0 sur X.

4) En déduire que la suite converge uniformément vers 0 sur X.

Exercice 5. (BONUS) On se donne un espace topologique X **séparé non métrique**. On suppose que X est localement compact, *c'est à dire que tout point admet un voisinage d'adhérence compacte.* On se donne un compact $K \subset X$.

Montrer qu'il existe un ouvert V tel que $\overline{V}$ est compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset X$.