Algèbre L3 — Janvier 2017

ε

Feuille 1

Exercice 1. Soit $f : (G, *) \to (H, \circ)$ un homomorphisme de groupes. On suppose que $a \in G$ est d'ordre n. Montrer que l'ordre de $f(a)$ divise n.

Exercice 2. Soit $(C_n, *)$ un groupe cyclique d'ordre n. Notons a un générateur de C_n.
1) Si b est un élément d'ordre d de C_n calculer l'ordre du sous-groupe H de C_n engendré par b.
2) Montrer que tout sous-groupe G de C_n est cyclique.

Exercice 3. 1) Déterminer tous les homomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ vers $(S_3, \circ)$
2) Déterminer tous les homomorphismes de groupes de $(S_3, \circ)$ vers $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4. Notons $\pi : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'homomorphisme de groupes déterminé par $\pi({}^{60}\bar{1}) = {}^{6}\bar{1}$.
1) Calculer $\operatorname{Ker} \pi$.
2) Pour quels entiers n, $n \geq 2$, l'homomorphisme $\pi' : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $\pi'({}^{60}\bar{1}) = {}^{n}\bar{1}$ existe-t-il ?
3) Si π' est défini, quelles sont les conditions supplémentaires sur n pour que π passe au quotient $\bar{\pi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, c.à.d. pour que $\bar{\pi}$ existe tel que $\pi = \bar{\pi} \circ \pi'$.

Exercice 5 Déterminer les groupes d'ordre ≤ 7 à isomorphisme près.