Algèbre L3 — Janvier 2017

Feuille 2

Exercice 1 M.q. si $\forall x \in G$, $x^2 = e$, alors le groupe G est abélien.

Exercice 2 Soient G un groupe et H son sous-groupe engendré par les carrés.

a) M.q. si $H = \{e\}$, alors G est abélien. b). M.q. $H \lhd G$

c). M.q. $G' \subset H$. d) Présenter $[x,y]$ comme un produit des carrés

Exercice 3 Pour $\sigma \in S_n$ on note $\mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \mathrm{sign}\left(\sigma(j) - \sigma(i)\right)$ (la signature de σ).

a). M.q. $\mathrm{sign} : S_n \to \{1, -1\}$ est un homomorphisme.

b). Soit c un k-cycle. M.q. $\mathrm{sign}(c) = (-1)^{k+1}$

Déf Le groupe alterné A_n est définit comme $A_n = \ker \mathrm{sign}$.

Exercice 4 Soit $\sigma, \tau \in S_n$. Soit $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k)(j_1 j_2 \dots j_\ell)\dots$ une décomposition de σ en cycles disjonts. Donner une decomposition de $\tau\sigma\tau^{-1}$ en cycles disjonts.

Exercice 5 Soit $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$

a) M.q. $V_4 \lhd S_4$ b). M.q. $S_4 / V_4 \simeq S_3$ et expliciter un isomorphisme.

Exercice 6 M.q.

a) $SL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{F}_2) = PGL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$

b) $PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$

c) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$

d) $PGL_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$ et $PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$