Algèbre L3 **Feuille 4** Mars 2017

# I. Produit semi-direct

**Déf :** 1) $G = A \overset{i}{\rtimes} B$ si $A \lhd G$, $B \leq G$, $AB = G$ et $A \cap B = \{e\}$.

2) $G = A \rtimes_f B$ pour $f : B \to \operatorname{Aut} A$ si $G = A \times B$ (en tant qu'ensemble) et $(a,b)\cdot(a',b') = (a \cdot f(b)(a'), bb')$.

**Exercice 1** Soit $G = A \overset{i}{\rtimes} B$. On note $f : B \to \operatorname{Aut} A$, $b \mapsto (a \mapsto bab^{-1})$. Montrer que $\varphi : A \rtimes_f B \to G$, $(a,b) \mapsto ab$ est un isomorphisme.

**Exercice 2** Soient $A, B \leq G$. M.q. $G = A \overset{i}{\rtimes} B$ ssi $\exists$ une suite exacte scindée $1 \to A_1 \xrightarrow{j} G \overset{s}{\underset{p}{\rightleftarrows}} B_1 \to 1$ telle que $A = \operatorname{im} j$ et $B = \operatorname{im} s$

**Exercice 3** M.q. la condition $AB = G$ dans la déf 1 peut être remplacée par $|A|\cdot|B| = |G|$ lorsque $|G| < \infty$

**Exercice 4** Soient $f, g : B \to \operatorname{Aut} A$. Supposons qu'il existe $\Phi \in \operatorname{Inn}(\operatorname{Aut} A)$ t.q. $g = \Phi \circ f$. Montrer que $A \rtimes_f B \simeq A \rtimes_g B$.

**Exercice 5** Soient $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donner exemple de $f, g : B \to \operatorname{Aut} A$ t.q. $A \rtimes_f B \not\simeq A \rtimes_g B$ et les deux groupes $\not\simeq A \times B$.

**Exo 5bis** Déterminer les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près

**Exercice 6** Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(k) \,\middle|\, A \in GL_n(k),\ b \in k^n \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in GL_n(k) \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \cancel{GL_n(k)}\ k^n \right\}$. M.q $G = T \rtimes H$.
M.q. $G \simeq GA_n(k) = \{k^n \to k^n,\ x \mapsto Ax + b \mid A \in GL_n(k),\ b \in k^n\}$.
Caractériser les images de $H$ et $T$ dans $GA_n(k)$.

# II. Action des groupes

**Exercice 7** a) M.q $|G| = p^n \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$. b) M.q $|G| = p^2 \Rightarrow G$ abélien.

**Exercice 8** Soit $G = GL_2(\mathbb{F}_5)$, $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
Etablir $|Cl(g_1)|$ et $|Cl(g_2)|$ par les deux méthodes : 1) en considérant les bases propres (quand c'est possible) et 2) en étudiant les centralisateurs $Z(g_1)$ et $Z(g_2)$.

**Exercice 9** Déterminer $|\operatorname{Isom}(P)|$ et $|\operatorname{Isom}_+(P)|$ pour tout polyèdre régulier $P$.

**Exercice 10** On considère l'action naturelle de $S_n$ sur $[\![1,n]\!]^2$ (c-à-d $\sigma\cdot(x,y) = (\sigma(x), \sigma(y))$). Montrer que cette action a exactement deux orbites (lesquelles ?) et montrer que les stabilisateurs réspectifs sont isomorphes à $S_{n-1}$ et $S_{n-2} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$