Algèbre L3 Feuille 5 Mars 2017

1. En considérant l'action par permutations cycliques de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur G^p, démontrer le théorème de Cauchy suivant:

   Si un nombre premier p divise $|G|$, alors G possède un sous-groupe d'ordre p.

2. Soient p et q deux nombres premiers, $2 \leq p < q$, $|G| = pq$. Montrer que:
   1) si $q \not\equiv 1 \bmod p$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$
   2) si $q \equiv 1 \bmod p$, il y a exactement deux groupes d'ordre pq à isomorphisme près. Lesquels ?

3. Déterminer tous les groupes d'ordre ≤ 15 à isomorphisme près.

4. Déterminer les groupes $\mathrm{Isom}(P)$, $\mathrm{Isom}^+(P)$ pour les polyèdres réguliers P.

5. Pour un corps k, on note $H_3(k)$ le groupe de Heisenberg $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in k \right\} \leq SL_3(k)$. Montrer que:
   a) ~~pour~~ si $G = H_3(k)$, alors $Z(G) \simeq k^+$ et $G/Z(G) \simeq k^+ \times k^+$ où on note k^+ le groupe additif de k.
   b) $H_3(\mathbb{F}_2) \simeq D_4$

6. Pour $G = D_n$, Q_8, $H_3(\mathbb{F}_3)$, déterminer:
   - tous les sous-groupes de G
   - les classes de conjugaison de G
   - $Z(G)$ et $G/Z(G)$ (centre)
   - $D(G)$ et $G/D(G)$ (le sous-groupe dérivé)
   - les centralisateurs des éléments de G.