Algèbre L3 Mai 2017

Feuille 7

Exercice 1. On note $O(E)$ le groupe des isométries d'un espace euclidien E où $\dim_{\mathbb{R}} E = n$.
Si on fixe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E on note $\mathrm{Det}(u)$ le déterminant de u dans cette base et on obtient un homomorphisme : $O(E) \xrightarrow[\mathrm{Det}\, u]{} \{\pm 1\}$.
On note $SO(E) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Det}$.

1) Montrer qu'il existe un sous-groupe H d'ordre 2 de $O(E)$ tel que $O(E)$ soit produit semi-direct de $SO(E)$ et de H. Ce produit peut-il être direct (en fonction de n) ?
2) Déterminer le centre de $O(E)$
3) Si $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$, montrer que $SO(E)$ est formé de rotations.

Exercice 2. Notons $GL_n(K)$ le groupe des $(n \times n)$ matrices à coefficients dans K de déterminant non nul.
Soit $\mathrm{Det} : GL_n(K) \to K^*$ l'homomorphisme $\det(M)$ $\forall M \in GL_n(K)$
Notons $SL_n(K)$ le noyau de $\det$.
$GL_n(K)$ est-il produit semi-direct de $SL_n(K)$ et K^* ? Ce produit peut-il être direct.
(Notons H le sous-groupe de $GL_n(K)$ engendré par $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ $\lambda \in K^*$, H est-il normal dans $GL_n(K)$?)

Exercice 3. Si $\dim_{\mathbb{R}} E = 2$ montrer que les sous-groupes finis de $O(E)$ sont soit cycliques soit diédraux.

Exercice 4 Montrer que $SO(3)$ est simple.

Exercice 5 Trouver une suite exacte

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow SU(3) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow 1$$