Université Paul Sabatier
L3 ESR, Analyse Complexe

S6, Année 2017–2018

Feuille TD 2

Exercice 1. Soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) Montrer que la fonction exp est définie sur $\mathbb{C}$ et continue.
(2) Montrer que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.
(3) Démontrer que exp est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses dérivées complexes successives.
(4) Déterminer toutes les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables f sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation différentielle complexe $f' = af$, où $a \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe fixé. Qu'en est-il si a est une fonction holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}$?
(5) Déterminer l'image par exp des doites horizontales $\Im z = \alpha$ et des droites verticales $\Re z = \beta$ et de $\mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Démontrer que exp induit un homéomorphisme de la bande $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C}; \alpha - \pi < \Im z < \alpha + \pi\}$ sur le domaine $D_\alpha := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{R}^+ \cdot e^{i\alpha})$ et déterminer son homéomorphisme inverse (réciproque) ℓ_α.
(6) Démontrer que ℓ_α est holomorphe sur D_α et caculer sa dérivée. Exprimer ℓ_α à l'aide de la branche principale du logarithme.
(7) Démontrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:
$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \text{ et } \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$
Calculer $|\sin z|$ et $|\cos z|$. Les fonctions cos et sin sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?
(8) Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Exercice 2. (Sommation d'Abel) Soient (u_n), (v_n) des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \ldots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a
$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$
(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles $\sum_1^k v_n$ est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n.v_n$ est convergente.

Exercice 3. Calculer le rayon de convergence de la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$$
et montrer que la série converge pour tout z tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.