Feuille facultative: L'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue

Rappels et notations. Soit $[a,b]$ un intervalle. Une subdivision Δ de $[a,b]$ est une suite finie de points $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. On note $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ s'appellent les intervalles de la subdivision. La norme de Δ est la plus grande longueur de ses intervalles: $\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Un système de points intermédiaires associé à Δ est un ensemble de points $\xi = \{c_1, \ldots, c_n\}$ tel que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La somme de Riemann associée à f, à la subdivision Δ et au système de points intermédiaires ξ est

$$S(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_i).$$

Définition. On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ s'il existe un nombre réel I tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ et pour tout système de points intermédiaires ξ associé à Δ on a

$$\Big| S(f, \Delta, \xi) - I \Big| < \varepsilon.$$

Le nombre I est l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$. On note $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Supposons que f est bornée sur $[a,b]$. Avec les notations ci-dessus, on définit:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i, \qquad S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

Les quantités $s_\Delta(f)$ et $S_\Delta(f)$ s'appellent *somme de Darboux inférieure,* respectivement *somme de Darboux supérieure* associées à f et à la subdivision Δ. Il est évident que pour tout système de points intermédiaires ξ on a

$$s_\Delta(f) \leq S(f, \Delta, \xi) \leq S_\Delta(f).$$

On rappelle les résultats suivants (démontrés en L2):

Proposition. *Toute fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.*

Théorème. (Darboux) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Les assetions suivantes sont équivalentes:*

i) La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision Δ telle que $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

iii) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision Δ de $[a,b]$ avec $\|\Delta\| < \delta$ on a $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note également $D(f) = \{x \in [a,b] \mid f \text{ est discontinue en } x\}$. L'objectif de cette feuille est de montrer le résultat suivant:

Théorème. (Lebesgue) *a) Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est bornée et $\lambda(D(f)) = 0$.*

b) Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice 1. Soit (X,d) un espace métrique et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\mathcal{V}_x$ la famille des voisinages de x.

a) On définit l'oscillation de f en $x \in X$ par

$$\omega_f(x) = \inf_{V\in\mathcal{V}_x}\left(\sup_{y,z\in V}|f(y)-f(z)|\right).$$

Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega_f(x)=0$.

b) On suppose que f est localement bornée (c'est-à-dire chaque point x admet un voisinage U_x tel que f est bornée sur U_x). On définit

$$\underline{f}(x) = \sup_{V\in\mathcal{V}_x}\left(\inf_{y\in V} f(y)\right), \qquad \overline{f}(x) = \inf_{V\in\mathcal{V}_x}\left(\sup_{y\in V} f(y)\right).$$

Montrer que $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, que $\overline{f}(x)-\underline{f}(x) = \omega_f(x)$ et que f est continue en x si et seulement si $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On utilise les notations précedentes.

a) Soit $x \in]a,b[$ fixé. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites telles que $a_n < x < b_n$ pour tout n et $b_n - a_n \longrightarrow 0$. Montrer que $\omega_f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in[a_n,b_n]} f(y) - \inf_{y\in[a_n,b_n]} f(y)\right)$.

b) Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. On définit $\varphi_\Delta : [a,b] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par $\varphi_\Delta(x) = \begin{cases} \omega_f(x) \text{ si } x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \\ M_i - m_i \text{ si } x \in]x_{i-1}, x_i[. \end{cases}$ Justifier que φ_Δ est Borel mesurable.

c) Montrer que ω_f est une fonction Borel mesurable.

(*Ind.: Considérer une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ de plus en plus fines telles que $\|\Delta_n\| \longrightarrow 0$ et montrer que $\varphi_{\Delta_n}(x) \longrightarrow \omega_f(x)$ pour tout x.*)

Exercice 3. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.

a) Montrer que pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$ on a $\omega_f(x) \leq M_i - m_i$.

b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a $\alpha\lambda(\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > \alpha\}) \leq S_f(\Delta) - s_f(\Delta)$.

c) On suppose que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\lambda(\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) > \alpha\}) = 0.$$

En déduire que $\lambda(\{x \in [a,b] \mid f \text{ est discontinue en } x\}) = 0$.

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. On définit

$$\underline{f}_\Delta(x) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[} \qquad \text{et } \overline{f}_\Delta(x) = \sum_{i=1}^n M_i \mathbf{1}_{]x_{i-1},x_i[}.$$

a) Montrer que $\underline{f}_\Delta \leq f \leq \overline{f}_\Delta$ $\lambda-$presque partout sur $[a,b]$. Calculer $\int_{[a,b]} \underline{f}_\Delta \, d\lambda$ et $\int_{[a,b]} \overline{f}_\Delta \, d\lambda$.

b) Soit $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ une suite de subdivisions avec $\|\Delta_n\| \longrightarrow 0$. Montrer que $\underline{f}_{\Delta_n} \longrightarrow \underline{f}$ et $\overline{f}_{\Delta_n} \longrightarrow \overline{f}$ $\lambda-$presque partout sur $[a,b]$.

c) Montrer que les fonctions $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont Lebesgue mesurables.

Dorénavant on suppose de plus que $\lambda(\{x \in [a,b] \mid f \text{ est discontinue en } x\}) = 0$.

d) Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$.

e) Soit $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ une suite de subdivisions avec $\|\Delta_n\| \longrightarrow 0$. Montrer que

$$\int_{[a,b]} \underline{f}_{\Delta_n} \, d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} f \, d\lambda \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]} \overline{f}_{\Delta_n} \, d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

En déduire que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx$.

f) Conclure la démonstration du théorème de Lebesgue.