Université Paul Sabatier — S6, Année 2017–2018
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 1

Exercice 1. (1) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$?
(2) Calculer la somme pour z dans le disque ouvert $D(0,R)$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où :

$$(1)\ a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2)\ a_n = n! \quad (3)\ a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^n}{n+1} & \text{si } n = 3m+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence R' de la série $\sum b_n z^n$ dans les cas suivants :

$$(1)\ b_n = a_n^2 \quad (2)\ b_n = \begin{cases} a_m & \text{si } n = 2m, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)\ b_n = \frac{a_n}{n!}.$$

Exercice 4. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ admet le même rayon de convergence.

Exercice 5. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 6. Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que :
(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = C$, où C est une constante,
(2) $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 + x - y^2$,
(3) $\mathrm{Re}(f(z)) = \cos x$.

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Les fonctions suivantes sont elles holomorphes?

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \qquad z \mapsto \overline{f(\overline{z})} \text{ sur } \overline{U} = \{z \mid \overline{z} \in U\}, \qquad z \mapsto f(\overline{z}) \text{ sur } \overline{U}.$$

Exercice 8. Soit D un domaine (i.e. ouvert connexe non vide) de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D. Démontrer que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D$ alors f est constante sur D. En déduire que si $|f|$ est constante sur D alors f est constante sur D.

Exercice 9. Posons

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que une fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Exercice 10. Soit f une fonctions holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. On pose $u := \Re e f$ et $v := \Im m f$.

(1) On suppose que $u = \Re e f(z) \equiv c$ est constante sur Ω. Démontrer que f est constante sur Ω.
(2) On suppose qu'il existe des nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et que pour tout $z = x + iy \in \Omega$,
$$a \cdot u(x, y) + b \cdot v(x, y) + c = 0.$$
Que peut-on dire de f ? Interpréter géométriquement cette condition et appliquer la question précédente.
(3) Même question si on suppose qu'il existe des nombres réels $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \Omega$,
$$a \cdot u^2(x, y) + b \cdot v^2(x, y) = 1.$$

Exercice 11. Calculer l'intégrale des fonctions $f(z) = z^2$ et $g(z) = \frac{1}{z}$ sur le chemin (orienté dans le sens trigonométrique)
$$\Gamma = [\pi/2, \pi/2 + i] \cup [\pi/2 + i, -\pi/2 + i] \cup [-\pi/2 + i, -\pi/2].$$

Exercice 12. Calculer les intégrales curvilignes de $z - \frac{1}{z}$ le long des trois courbes joignant les points $1 - i$ et $1 + i$ en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.