Université Paul Sabatier
L3 ESR, Analyse Complexe

S6, Année 2017–2018

Feuille TD 4

Exercice 1. Soient $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $r \in]0,1[$, $M > 0$ et $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ telle que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$ et qu'il existe $z_0 \in D(0,r)$ tel que $f(z_0) = 0$. Montrer, à l'aide de la formule de Cauchy, que

$$|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|).$$

Exercice 2. (1) Soit $r > 0$. On pose $\Gamma(t) = re^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z}.$$

(2) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Reconnaître la courbe γ^* et calculer

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

en fonction de $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z}$.

(3) Exprimer I en fonction de

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

En déduire la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Exercice 3. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 4. Soient $I = [0,1]$, $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $t \in I$, on pose $\chi(t) = \overline{\gamma(t)}$.

(1) Établir :

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_\chi \overline{f(\overline{z})}dz.$$

(2) On suppose que $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$. Montrer que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = -\int_\gamma \overline{f(z)}\frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 5. Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide.

(1) Montrer que les seules fonctions analytiques définies sur Ω et à valeurs dans $i\mathbb{R}$ sont les constantes.

(2) Soit f et g deux fonctions analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. On suppose que g ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$ et que $f(z)\overline{g(z)} \in i\mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = ic\, g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 6. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{\mathbb{D}}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω et non-constante. On suppose que $f(0) = 1$ et que $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans $\mathbb{D}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer $g(z) = f(z)f(-z)$.*

Exercice 9. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^*$ une fonction analytique continue jusqu'au bord. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe deux nombres complexes distincts $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$ tels que $|f(z_0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$.

Exercice 10. Soit $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{e^z + e}\right)$.

(1) Quel est le plus grand ouvert U sur lequel f est holomorphe ?

(2) Trouver les zéros de f.

(3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11. Soit $f(z) = \sin \frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 12. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité. Pour tout $a \in \mathbb{D}$ posons

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

(1) Montrer que φ_a et une bijection qui applique le cercle unité sur le cercle unité, $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et a en 0.

(2) Montrer que la fonction réciproque de φ_a est φ_{-a} et qu'on a

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

(3) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, bijective avec réciproque analytique. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda\varphi_a(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, où $a \in \mathbb{D}$ est tel que $f(a) = 0$.

Exercice 13. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité et $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ une fonction analytique telle que $|f(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$.

(1) Montrer qu'ou bien f est constante ou bien il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = 0$. *Indication :* considérer la fonction $1/f$.

(2) Prouver que si f n'est pas constante, alors elle n'a qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$.

(3) Soient $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$ les zéros de f et soient $m_1, \ldots, m_N$ leurs multiplicités respectives. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 telle que $f = \lambda \prod_{j=1}^{N} \varphi_{a_j}^{m_j}$, où

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Indication : on pourra appliquer (1) à une une fonction bien choisie.