Université Paul Sabatier S6, Année 2017–2018
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 5

Exercice 1. Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_{C(0,2)} (z^2 + 2z + e^{2z})dz.$$

Exercice 2. Les applications $z \mapsto \bar{z}^2 + 2\bar{z} + e^{2\bar{z}}$ et $z \mapsto \overline{\bar{z}^2 + 2\bar{z} + e^{2\bar{z}}}$ sont elles holomorphes ?

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 3$ et $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + e^z - 1}{z}$ pour $z \neq 0$. Justifier que la fonction f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{C(0,1)} \frac{z^2 + 2z + e^z - 1}{z} dz,$$

puis celle de

$$\int_{C(0,1)} \frac{z^2 + 2z + e^z}{z} dz.$$

Exercice 5. Calculer $i^{1/3}$, $(i-1)^{1/3}$, puis $(i(i-1))^{1/3}$.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe contenant 0. Existe-t-il une fonction f holomorphe dans Ω et vérifiant

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand ?

Exercice 7. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, et f, g holomorphes dans Ω ne s'annulant pas dans Ω. On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_n$ de points deux à deux distincts d'Ω, de limite $a \in \Omega$ et vérifiant

$$f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = cg$.

Exercice 8. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, D une droite (réelle affine) de $\mathbb{C}$, et f une fonction continue sur Ω et holomorphe dans $\Omega \setminus D$. Prouver que f est holomorphe dans Ω.

Exercice 9. Soient f une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$), et $A, B > 0$ tels que

$$|f(z)| \leq A + B|z|$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est nécessairement un polynôme de degré au plus 1. (*Indication :* on pourra utiliser les formules de Cauchy.)

Exercice 10. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité $D(0,1)$ telle que$|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. Prouver, pour $n \geq 1$:

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1).$$