Université Paul Sabatier S6, Année 2017–2018
L3 ESR, Analyse Complexe

Feuille TD 7

Exercice 1. Calculer les résidus de

(1) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ $(z = k\pi)$,
(2) $\frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ $(z = 0)$,

Exercice 2. Trouver le résidu de $f \circ \varphi$ au point 0, si φ est holomorphe au voisinage de 0, avec $\varphi'(0) \neq 0$ et si f a un un pôle simple au point $\varphi(0)$ avec le résidu R.

Exercice 3. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $K \subset \Omega$ un compact. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans Ω qui ne s'annule pas sur le bord orienté Γ de K.

(1) Montrer que f n'a qu'un nombre fini des zéros $p_1, \ldots, p_n$ dans $\overset{\circ}{K}$.
(2) Montrer que si $n = 1$, alors
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1,$$
où $m_1 \geq 1$ est la multiplicité de p_1 comme zéro de f.
(3) Montrer qu'en général on a
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1 + \cdots + m_n,$$
où $m_1, \ldots, m_n$ sont les multiplicités des zéros $p_1, \ldots, p_n$ de f dans $\overset{\circ}{K}$.

Exercice 4. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} \, dz\,.$$

Exercice 5. On note γ le cercle de centre 0 et de rayon 3/2 parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :
$$\int_\gamma \frac{5z^2 + 1}{z(z-1)} \, dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} \, dz\,.$$

Exercice 6. Pour $r \neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :
$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1} \, dz\,.$$

Exercice 7. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes:

(1) $0 < |z| < 1$,
(2) $1 < |z| < 2$.

Exercice 8. Décomposer en série de Laurent dans les diverses couronnes admissibles de centre indiqué, les fonctions suivantes:

(1) $\frac{1}{z+a}$, $(z = 0)$
(2) $\frac{z - \sin z}{z^3}$ $(z = 0)$,
(3) $\frac{z}{z^2+1}$ $(z = i)$,

Exercice 9. Soit
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

(1) Déterminer les singularités de f et calculer les résidus en ces points.
(2) Soit $\gamma_\varepsilon \colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \text{Rés}(f,0)\cdot \pi i.$$
(3) Soit $0 < \varepsilon < 1 < R$. Représenter le lacet Γ formé de la suite de chemins suivants :
   - $\gamma_1(t) = t$ pour $t \in [\varepsilon, R]$
   - $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$ pour $t \in [0,1]$
   - $\gamma_3(t) = t$ pour $t \in [-R, -\varepsilon]$
   - $\gamma_4(t) = \varepsilon e^{\pi i(1-t)}$ pour $t \in [0,1]$.

(4) Calculer
$$\int_\Gamma f(z)dz.$$
(5) Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$
(6) En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 1$ et $b > \sqrt{2}$. Calculer :
$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\cos x}\,, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx\,, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b+\cos x+\sin x}\,.$$

Exercice 11. Soit $R \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit Γ_R le bord du demidisque de centre 0 et rayon R situé dans le demi-plan supérieur.

a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale
$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz\,.$$
En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx.$$
b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx.$$