Loi de variable aléatoire – Espérance
Théorème de transport – Fonction caractéristique

*(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)*

Exercice 1. On modélise le jet de deux dés avec l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{36}$. Le premier dé sera la variable aléatoire $X : \Omega \to E$, $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$, définie par $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1$.
a) Quelle la mesure image $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{P}$ par X ?
b) Si $\phi : (E, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, expliciter les deux intégrales $\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_\Omega \phi \circ X d\mathbb{P}$ et $\int_E \phi \, d\mathbb{P}_X$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}\big(X \geq m+n \,|\, X \geq n\big) \;=\; \mathbb{P}(X \geq m).$$
(On dit que X est sans mémoire.) En supposant que $\mathbb{P}(X=0) = a$, déterminer la loi de X. Même question si X est une variable aléatoire à valeurs réelles positives telle que
$$\mathbb{P}\big(X > s+t \,|\, X > t\big) \;=\; \mathbb{P}(X > s), \quad s, t > 0.$$

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi exponentielle de paramètre 1.
a) Soit $Z = \min(X, 2)$. Exprimer la loi de Z sous la forme d'une combinaison linéaire d'une masse de Dirac et d'une mesure à densité.
b) Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X.

Exercice 4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
a) Quelle est la loi de $X = \tan(\frac{\pi}{2}(2U-1))$? Que dire de l'espérance de X ?
b) Calculer et tracer les fonctions de répartition de X et $Y = \max(X, \frac{1}{2})$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (sous la forme $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)p^k$, $k \in \mathbb{N}$). Calculer $p_n(x) = \mathbb{P}(X > nx)$ pour $p = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, $x \geq 0$. Étudier la limite de p_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi jointe de X et Y vérifie
$$\mathbb{P}\big((X,Y) = (j,k)\big) \;=\; \frac{a}{j!\,k!}\,, \quad (j,k) \in \mathbb{N}^2,$$

où $a \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Mêmes questions si à présent

$$\mathbb{P}\big((X,Y) = (j,k)\big) \;=\; \frac{a(j+k)}{2^{j+k}}\,, \quad (j,k) \in \mathbb{N}^2.$$

Exercice 7. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f(x,y) = \frac{4y}{x^3}\,\mathbb{1}_{\{0<x<1, 0<y<x^2\}}.$$

Déterminer les lois de X et Y. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi du couple (N,U) où N et U sont respectivement les parties entière et décimale de X.

Exercice 9. Le couple aléatoire (X,Y) est uniformément réparti sur le disque unité D de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les lois marginales. Déterminer la loi du couple (R,Θ) des coordonnées polaires de (X,Y). *(Indication : on pourra évaluer $\mathbb{E}(\phi(R)\psi(\Theta))$ pour des fonctions boréliennes bornées $\phi,\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)* Mêmes questions si (X,Y) suit la loi de densité $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-(x^2+y^2)/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité $f_{(X,Y)}(x,y) = c(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Que vaut la constante c ? Montrer que les lois marginales de X et Y admettent des densités f_X et f_Y que l'on déterminera. Les variables X et Y sont-elles corrélées ? Comparer $f_{(X,Y)}$ avec le produit $f_X f_Y$.

Exercice 11. Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,n]$, où n est un entier ≥ 1.
a) Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$ et calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
b) Quelle est la loi de $[X_n]+1$? de $[X_n]+1-X_n$?
c) Soit Y_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. Justifier que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_1)$. En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^n k$.

Exercice 12. Pour X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ de carré intégrable telle que $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) > 0$, démontrer *l'inégalité de Cantelli* :

$$\mathbb{P}\big(X - \mathbb{E}(X) \geq t\big) \;\leq\; \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2} \quad \text{si} \quad t \geq 0.$$

(Indication : supposer $\mathbb{E}(X) = 0$, puis remplacer X par $X+a$, $a \geq 0$.)

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire positive de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $t \in]0,1[$. Comparer $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leq t\,\mathbb{E}(X)\}})$ et $t\,\mathbb{E}(X)$. En déduire que $(1-t)\,\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}\big(X \mathbb{1}_{\{X \geq t\,\mathbb{E}(X)\}}\big)$, puis l'inégalité (*de Paley-Zygmund*)

$$\mathbb{P}\big(X \geq t\,\mathbb{E}(X)\big) \;\geq\; (1-t)^2 \,\frac{(\mathbb{E}(X))^2}{\mathbb{E}(X^2)}\,.$$

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
a) Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, bornée ainsi que sa dérivée, démontrer que

$$\mathbb{E}\big(Xg(X)\big) \;=\; \mathbb{E}\big(g'(X)\big).$$

b) Soit $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de (la loi de) X. Établir une équation différentielle entre ϕ' et ϕ. En déduire la valeur de $\phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et soit $Z = m + \sigma X$.
a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.
b) Déterminer la densité de la loi de Z. Quelle est la loi de Z ?
c) Quelle est la fonction caractéristique $\phi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ})$ de Z ?

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de densité $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la transformée de Laplace L_X de la loi de X, en précisant son domaine de définition. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geq 1$, et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 17*. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de densité $f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}\, e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$, où $c = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$.
a) Établir une équation différentielle pour la fonction caractéristique $\phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$, $t \in \mathbb{R}$. En conclure que

$$\phi(t) \;=\; \exp\bigg(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{u+i}\,du\bigg).$$

Calculer $\phi(t)$.
b) Quel est le sens de $I = \int_0^\infty \cos(x^2)dx$? Calculer I en étudiant $\phi(t)$ lorsque $t \to \infty$.