Université de Toulouse – Paul-Sabatier **Année 2018-2019**

L3 mathématiques - ESR

Mesure et Probabilités Feuille d'exercices n° 3

Indépendance – Somme de variables aléatoires indépendantes – Vecteurs gaussiens

---

*(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)*

Exercice 1. Soient U et V deux variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Quelle est la loi du couple (U, V) ? Déterminer la loi de $\frac{U}{V}$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Calculer les densités des lois des variables aléatoires $\frac{X}{Y}$ et $\frac{X}{X+Y}$.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme sur $[0, \frac{1}{\alpha}]$ et Y la loi exponentielle de paramètre α. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

Exercice 4*. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[-1, +1]$. Montrer que $X+Y$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on calculera. Calculer la transformée de Fourier de la loi X. En déduire celle de $X + Y$. En utilisant le théorème d'inversion de Fourier, démontrer que $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Soit X_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, n]$.
a) Démontrer que $\mathbb{E}(X_n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_n) = n^2\mathrm{Var}(X_1)$, et calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
b) Quelle est la loi du couple $([X_n] + 1, [X_n] + 1 - X_n)$?
c) Soit Y_n une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Justifier que $\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_n) - \mathrm{Var}(X_1)$. En déduire la formule pour $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 6. Soient X et N deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi uniforme sur $[-1, +1]$ et N la loi de Poisson de paramètre 1. Calculer $\mathbb{E}(X^N)$.

Exercice 7. Soient $X_0, X_1, \dots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ de paramètre $p \in]0, 1[$, et soit N une variable aléatoire à valeurs entières, indépendante des X_i, $i \geq 0$, de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$.
a) Calculer les fonctions génératrices des moments de X_0 et N.
b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = \sum_{i=0}^N X_i$.

Exercice 8. Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi intégrable, et soit N une variable aléatoire à valeurs entières, intégrable, et indépendante de la suite $X_1, X_2, \dots$. Établir *l'identité de Wald* :

$$\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_N) \,=\, \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1).$$

Exercice 9. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\{0,1\}$. On note $T = \inf\{n \geq 1\,; X_n = 1\}$ avec $\inf \emptyset = +\infty$.
a) Montrer que $T < +\infty$ p.s. et calculer $\mathbb{P}(T = n)$ pour tout $n \geq 1$.
b) Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{Var}(T)$.
c) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_T ?
d) Démontrer que les variables aléatoires $Y_i = X_{T+i}$, $i \geq 1$, sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 10. Montrer par un calcul direct sur $\mathbb{P}(X_i = k) = (1-p_i)p_i^k$, $k \in \mathbb{N}$, que si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$ respectivement, alors $\min(X_1, X_2)$ suit encore une loi géométrique dont on précisera le paramètre. Qu'en est-il si X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètre $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$? Le démontrer sans calcul grâce à l'Exercice 5, Feuille 2.

Exercice 11. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli à valeurs dans $\{0,1\}$ de paramètre de succès $p \in]0,1[$. On s'intéresse à la fréquence $F_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, $n \geq 1$.
a) Calculer l'espérance et la variance de F.
b) On suppose que $p = \frac{1}{4}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\Big(F_{10000} \in \big[\tfrac{24}{100}, \tfrac{26}{100}\big]\Big) \;\geq\; \tfrac{95}{100}\,.$$

Exercice 12. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit ε, indépendante de X, telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \frac{1}{2}$. Démontrer que εX suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le couple $(X, \varepsilon X)$ est-il gaussien ?

Exercice 13. Soient $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ des nombres reéls, et soit $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de covariance

$$\mathbb{E}(X_i X_j) \;=\; \min(t_i, t_j), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Déterminer les lois marginales. Poser $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes. *(La covariance* $\min(s,t)$*,* $s, t \geq 0$*, décrit le fameux « mouvement brownien », processus stochastique décrivant le mouvement aléatoire, et sans mémoire, d'une particule.)*

Exercice 14*. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. Poser $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Soit U une matrice $n \times n$ orthogonale, et soit $Y = UX$. Rappeler pourquoi $\sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$.
a) Démontrer que Y a même loi que X.
Poser

$$\overline{X} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \overline{X}\big)^2.$$

b) En choisissant U dont tous les termes de la dernière ligne sont égaux à $\frac{1}{\sqrt{n}}$, vérifier que

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

c) Déduire de ce qui précède que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes et que $(n-1)S^2$ a la même loi que $\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$.

Exercice 15*. Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ ; on dit que μ est *indéfiniment divisible* si pour tout entier $n \geq 1$ il existe des variables aléatoires réelles $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes de même loi ν_n telles que la loi de la somme $X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$ soit μ.

1) Démontrer qu'une loi μ est indéfiniment divisible si et seulement si sa fonction caractéristique φ est, pour tout entier n, la puissance n-ième d'une fonction caractéristique.

2) μ est-elle indéfiniment divisible dans les cas suivants : a) $\mu = \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$; b) μ est la loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 ; c) μ est la loi de Poisson de paramètre λ ; d) μ est la loi de Cauchy (on rappelle que la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy est donnée par $\mathrm{e}^{-|t|}$) ?

3) Soit X de loi μ de Bernoulli sur $\{0,1\}$ de paramètre $0 < p < 1$; soient également Y et Z des variables aléatoires indépendantes de loi commune ν telles que la somme $Y + Z$ soit de loi μ.

a) Si B est un intervalle ne contenant pas 0 et $\frac{1}{2}$, démontrer que $\mathbb{P}(Y + Z \in B + B) = 0$ (où $B + B = \{x + y \,;\, x \in B, y \in B\}$) et en déduire que $\nu \otimes \nu(B \times B) = 0$.

b) Déduire de la question précédente que Y ne peut prendre que les valeurs 0 et $\frac{1}{2}$.

c) En conclure que μ n'est pas indéfiniment divisible.