Convergence presque sûre, en probabilité – Théorèmes limites

*(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)*

Exercice 1. Pour toute variable aléatoire $Z \geq 0$, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \frac{1}{t}\, \mathbb{E}\big(Z\, \mathbb{1}_{\{Z \geq t\}}\big).$$

a) Soit à présent X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Démontrer que

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X| \geq t\}}) = 0.$$

Déduire de la question préliminaire que pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} n\, \mathbb{P}\big(|X| \geq \delta \sqrt{n}\big) = 0.$$

b) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de même loi que X. En utilisant le question précédente, que peut-on dire de la convergence de la suite de variables aléatoires $\frac{1}{\sqrt{n}} \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, lorsque $n \to \infty$?

Exercice 2. Soit une $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit X_n une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi binomiale de taille $n \geq 1$ et de paramètre $x \in [0,1]$. On note $T_n = \frac{X_n}{n}$.
a) Montrer que $Q(x) = \mathbb{E}(T_n)$ est un polynôme.
b) Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathrm{Var}(T_n)$.
c) Pour $\delta > 0$, poser $A = \{|T_n - x| \leq \delta\}$ et montrer que $\mathbb{P}(A^c) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
d) Invoquer un théorème pour affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x, y \in [0,1]$ et $|x - y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
e) Décomposer $\mathbb{E}(|f(T_n) - f(x)|)$ suivant A et A^c pour obtenir que

$$\big|f(x) - Q(x)\big| \leq \frac{1}{2n\delta^2} \sup_{t \in [0,1]} \big|f(t)\big| + \varepsilon.$$

f) Quel théorème vient-on de démontrer ?

Exercice 3. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli sur $\{0,1\}$ de paramètres de succès $p_n = \frac{1}{n}$.
a) Que dire des limites en probabilité et dans L^1 de la suite $(nY_n)_{n \geq 1}$?

b) On suppose que les Y_n, $n \geq 1$, sont mutuellement indépendantes. Que dire des limites en probabilité, presque sûre et dans L^1 de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$?
c) Mêmes questions si $p_n = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définissant le terme général d'une série convergente, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \neq a_n) < \infty$. Démontrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est presque sûrement convergente.

Exercice 5*. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} X_n$ converge presque sûrement, et montrer qu'elle suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. *(Indication : déterminer la mesure des ensembles dyadiques.)*

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi uniforme sur $[0, 1]$; démontrer que
a) $\frac{1}{nX_n} \to 0$ en probabilité ;
b) $\frac{X_n}{n} \to 0$ presque sûrement ;
c) $\frac{1}{n^2 X_n} \to 0$ presque sûrement.
On suppose en outre les X_n, $n \geq 1$, mutuellement indépendantes. Établir que
d) $\frac{1}{nX_n}$ ne converge pas presque sûrement ;
e) $\frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2) \to \frac{1}{3}$ presque sûrement.

Exercice 7. Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que, pour chaque $k \geq 1$, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_k > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$.
a) Démontrer que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement convergente.
b*) Calculer $\mathbb{E}(e^{-S_n})$ pour chaque $n \geq 1$. Démontrer que si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty$, alors la série $\sum_{k=1}^\infty X_k$ est presque sûrement divergente.

Exercice 8. Let $(X_k)_{k\geq 1}$ be a sequence of real random variables on $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, independent with the same distribution $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.
a) Show that for every $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) \leq e^{\lambda^2/2}$.
b) Let $a_1, \ldots, a_n$ be real numbers such that $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$; set $S = \sum_{k=1}^n a_k X_k$. Prove that for every $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda S}) \leq e^{\lambda^2/2}$. Deduce that for any $t > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|S| \geq t\big) \leq 2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

c*) Use the preceding question to show that, for any real numbers $a_1, \ldots, a_n$, and any $p > 0$,

$$\left[\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k X_k\right|^p\right)\right]^{1/p} \leq C_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}$$

for some constant $C_p > 0$ only depending on p *(Khinchine's inequality)*.
d) Set, for $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Show that for every $\alpha > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n(\ln n)^\alpha}} = 0 \qquad \text{almost surely.}$$

Exercice 9. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telles que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}$ soit convergente ; alors (*lemme de Kronecker*)

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \;\to\; 0.$$

(Indication : utiliser la formule de sommation d'Abel

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \;=\; \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell(s_\ell - s_{\ell+1}) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} s_\ell - s_{n+1}$$

où $s_\ell = \sum_{n\geq \ell} \frac{x_n}{n}$*.)* Vérifier que l'énoncé reste valable pour une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans un espace normé.

En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de carré intégrable deux à deux non correlées telle que $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \big[X_\ell - \mathbb{E}(X_\ell)\big] \;\to\; 0 \quad \text{dans } \mathrm{L}^2.$$

Exercice 10*. Si μ et ν sont deux mesures de probabilités sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, on définit la distance en variation totale comme

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \;=\; \sup_{B\in\mathcal{B}} \big|\mu(B) - \nu(B)\big|.$$

Vérifier que si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$ de lois respectives μ et ν,

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \;\leq\; \mathbb{P}(X \neq Y).$$

Soient à présent Y et U deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que Y suit une loi de Poisson de paramètre $0 < p < 1$ et U une loi de Bernoulli sur $\{0,1\}$ de paramètre de succès $1 - (1-p)\mathrm{e}^p$.

a) Calculer la loi de $X = 1 - \mathbb{1}_{\{Y=U=0\}}$ et montrer que $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2$.

b) Soient X_i, $i = 1, \ldots, n$, des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres respectifs $0 < p_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, et soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Démontrer qu'il existe une variable aléatoire Z de loi de Poisson de paramètre $\theta = p_1 + \cdots + p_n$ telle que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{S_n}, \mathbb{P}_Z) \;\leq\; p_1^2 + \cdots + p_n^2.$$

c) Application. Soit $\theta > 0$ et soit μ_n, $n \in \mathbb{N}$, $n > \theta$, la suite de mesures sur $\mathbb{N}$ définies par

$$\mu_n\big(\{k\}\big) \;=\; C_n^k\Big(\frac{\theta}{n}\Big)^k\Big(1 - \frac{\theta}{n}\Big)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Démontrer que

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) \;\leq\; \frac{\theta^2}{n}$$

où ν est la loi de Poisson de paramètre θ.