Université de Toulouse – Paul-Sabatier **Année 2018-2019**

L3 mathématiques - ESR

Mesure et Probabilités Feuille d'exercices n° 5

Statistique d'ordre – Intervalle de confiance

*(Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.)*

Exercice 1. (*Lois gamma et beta*). Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

a) Démontrer que la loi de $X_1 + \cdots + X_n$, dite gamma et notée $\gamma(n, \theta)$, admet la densité $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(n)} \theta^n x^{n-1} e^{-\theta x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\Gamma(n) = (n-1)!$).

Pour plus de simplicité dans la suite, prendre $\theta = 1$ (le cas général s'en déduisant compte tenu que θX_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1 si X_1 est de paramètre θ – à vérifier).

b) Montrer que $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ est indépendant de $X_1 + X_2$, et suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

c) Généraliser la question précédente en déterminant, pour $1 \leq i < n$, la loi de

$$\frac{X_1 + \cdots + X_i}{X_1 + \cdots + X_n},$$

dite beta et notée $\beta(i, n-i)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^{i-1}(1-x)^{n-i-1} dx$. *(Indication : écrire* $X_1 + \cdots + X_n = (X_1 + \cdots + X_i) + (X_{i+1} + \cdots + X_n)$ *et utiliser la question a).)*

Remarque. On peut extrapoler la loi gamma $\gamma(n, \theta)$ pour $n \in]0, \infty[$ et la loi beta $\beta(i, j)$ pour $i, j \in]0, \infty[$.

Exercice 2. Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Vérifier que $\mathbb{P}(\exists\, i \neq j\,; U_i = U_j) = 0$.

a) Soit $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne, positive, et invariante par permutation des coordonnées : si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Démontrer que

$$\mathbb{E}\big(\phi(U_1, \dots, U_n)\big) \,=\, n! \int_D \phi \, d\lambda$$

où $D = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1\big\}$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. *(Indication : commencer avec $n = 2, 3$).*

b) On désigne par $U_{(1)} < \cdots < U_{(n)}$ l'échantillon $(U_1, \dots, U_n)$ dont les valeurs ont été réarrangées dans l'ordre croissant. Démontrer que la loi du vecteur $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ est uniforme sur D.

c*) Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Démontrer que le vecteur

$$\left(\frac{X_1}{X_1 + \cdots + X_{n+1}}, \dots, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1 + \cdots + X_{n+1}}\right)$$

a même loi que $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$.

Exercice 3*. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On note $\Delta = \{y \in]0,\infty[^{n-1};\ \sum_{i=1}^{n-1} y_i < 1\}$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $k = 1, \dots, n$, et $Y_i = \frac{X_i}{S_n}$, $i = 1, \dots, n$.
a) Soit l'application $u :]0,\infty[^n \to \Delta \times]0,\infty[$ définie pour $x \in]0,\infty[^n$ par

$$u(x) = \left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sum_{i=1}^n x_i}, \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Montrer que u est un difféomorphisme. Expliciter sa fonction réciproque v et montrer que son déterminant jacobien en $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Delta \times]0,\infty[$ est donné par $\det Dv(y) = y_n^{n-1}$.
b) Démontrer que le vecteur aléatoire $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ est de loi uniforme sur Δ. *(Indication : utiliser un changement de variable $x = v(y)$.)*
c) Calculer, pour des fonctions ϕ, ψ mesurables et positives, $\mathbb{E}(\phi(Y_1, \dots, Y_n)\psi(S_n))$. En déduire la loi de S_n, et que $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ et S_n sont indépendantes.

Exercice 4. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\theta = \frac{1}{\kappa} > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.
a) Rappeler la moyenne et la variance de X_1.
b) Démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - \kappa| \geq t\big) \ \leq \ \frac{\kappa^2}{nt^2}\,.$$

c) Calculer un intervalle de confiance au niveau de confiance α de $\kappa = \frac{1}{\theta}$ pour $\alpha n > 1$.
d) Mêmes questions si les $X_1, X_2, \dots$ sont indépendantes de même loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu à estimer.

Exercice 5. Un vol Toulouse-Paris est assuré par un avion de $N = 150$ places. Pour un vol de ce type, des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0,75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire « nombre de personnes parmi les n possibles ayant confirmé leur réservation pour ce vol ».
a) Quelle est la loi exacte suivie par X ?
b) Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion (c'est-à-dire trouver n tel que $\mathbb{P}(X > 150) \leq 0,05$) ? *(Indication : utiliser l'inégalité de Chebyshev, puis proposer une estimation plus précise à partir du théorème central limite.)*
c) Discuter suivant les valeurs de N, p et n.

Exercice 6. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; on définit la suite de variables aléatoires X_n, $n \geq 1$, par $X_n = U$ si n est pair et $X_n = V$ si n est impair.
a) Que peut-on dire de la convergence de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ presque sûrement, en probabilité, dans L^1 ?
b) Que peut-on dire de la convergence des suites $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ (fonctions de répartition) et $(\varphi_{X_n})_{n\geq 1}$ (fonctions caractéristiques) ?